

**Parole sconosciute non matematicamente rilevanti:
Influenzano davvero la risoluzione di un problema?
Un ottimo spunto di riflessione per un dialogo tra
diverse teorie**

**Unknown words not mathematically relevant: Do they
really affect the problem-solving process?
An excellent starting point for a dialogue between
different theories**

**Miglena Asenova,^{1,2} Bruno D'Amore,^{1,3,6} Martha Isabel Fandiño Pinilla,¹
Maura Iori,¹ George Santi^{1,4} e Silvia Sbaragli^{1,5}**

¹Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia

²Università di Palermo, Palermo, Italia

³Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

⁴Libera Università di Bolzano, Bolzano, Italia

⁵Centro competenze Didattica della Matematica del Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI, Locarno, Svizzera

⁶Centro de investigación Mescud, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Sunto. *In questo articolo si riesamina criticamente una ricerca sull'influenza di parole chiave sconosciute (non matematicamente rilevanti) presenti nel testo di un problema di matematica sulla risoluzione del problema stesso da parte di giovani studenti. La ricerca, proposta nei primi anni '90, è stata riproposta con modalità simili tra la fine del 2019 e l'inizio del 2020 allo scopo di: (1) stabilire se i risultati empirici ottenuti nella prima ricerca risultano confermati o attendibili; (2) verificare se strumenti teorici più moderni conducono a risultati di ricerca diversi da quelli ottenuti nella prima ricerca; (3) mostrare come un ampio quadro teorico, molto eterogeneo, sia in grado di fornire interpretazioni o spiegazioni del fenomeno in esame; (4) porre in relazione gli strumenti teorici disponibili all'epoca della ricerca condotta negli anni '90 (la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau) e gli strumenti teorici forniti da altre teorie o approcci di ricerca successivi (in particolare, la teoria dell'oggettivazione di Luis Radford e l'approccio semio-cognitivo di Raymond Duval). I risultati della ricerca svolta tra il 2019 e il 2020 confermano e arricchiscono di dettagli i risultati della ricerca condotta negli anni '90, grazie ai nuovi strumenti di analisi e di interpretazione a disposizione della ricerca in didattica della matematica. Strumenti che fanno parte di teorie parzialmente comparabili e parzialmente compatibili con la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau, ma il cui dialogo in chiave ermeneutica, o confronto non epistemologico, risulta di enorme importanza per accedere a chiavi interpretative più raffinate ed efficaci del fenomeno in esame, come la presente ricerca suggerisce.*

Parole chiave: parole sconosciute nel testo di un problema, risoluzione di un problema, immagini-modelli-schemi, teoria delle situazioni didattiche, teoria dell'oggettivazione, approccio semio-cognitivo, confronto tra teorie.

Abstract. *In this article we carry out a critical account of a previous research on the influence of unknown (mathematically irrelevant) keywords present in a mathematical problem in solving the problem by young students. The research, proposed in the early '90s, was repeated in similar ways between the end of 2019 and the beginning of 2020 aimed at: (1) establishing whether the empirical results of the first research are confirmed or reliable; (2) checking whether more modern theoretical tools lead to research results different from those obtained in the first research; (3) showing how a broad, particularly heterogeneous theoretical framework is able to provide interpretations or explanations of the phenomenon under study; (4) linking the theoretical tools available in the '90s (Brousseau's theory of didactical situations) to the theoretical tools provided by subsequent theories or research approaches (in particular, Luis Radford's theory of objectification and Duval's semio-cognitive approach). The results of the research carried out between 2019 and 2020 confirm and enrich with details the results of the research carried out in the '90s, due to the new analysis and interpretation tools available to research in mathematics education. Tools of theories that are partially comparable and partially compatible with Brousseau's theory of didactical situations. Nevertheless, a dialogue in a hermeneutic key, or a non-epistemological comparison between these theories is extremely important to access more refined and effective interpretative keys of the phenomenon under study, as the present research suggests.*

Keywords: unknown words in the text of a problem, problem-solving, images-models-schemes, theory of didactical situations, theory of objectification, semio-cognitive approach, comparison between theories.

Resumen. *En este artículo se reexamina críticamente una investigación que se centraba en indagar sobre la influencia de palabras claves desconocidas (sin relevancia matemática) presentes en el texto de un problema de matemática en el proceso mismo de resolución por parte de jóvenes estudiantes. La investigación propuesta en los primeros años '90, fue nuevamente presentada con modalidades similares a finales de 2019 y a inicios de 2020 con el objetivo de: (1) establecer si los resultados empíricos obtenidos en la primera investigación se confirman o son atendibles; (2) verificar si instrumentos teóricos modernos conducen a resultados diferentes a los obtenidos en la primera investigación; (3) mostrar como un amplio cuadro teórico, muy heterogéneo, sea en grado de proporcionar interpretaciones o explicaciones del fenómeno en examen; (4) establecer una relación entre los instrumentos teóricos disponibles en los años de la primera investigación (la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau) y los instrumentos teóricos proporcionados por otras teorías o enfoques de investigación posteriores (en particular, la teoría de la objetivación de Luís Radford o de la teoría semio-cognitiva de Raymond Duval). Los resultados de la investigación realizada entre el 2019 y el 2020 confirman y enriquecen de pormenores los resultados de la investigación realizada en los años '90, gracias a los nuevos instrumentos de análisis y de*

interpretación a disposición de la investigación en didáctica de la matemática. Instrumentos que forman parte de teorías parcialmente comparables y parcialmente compatibles con la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, pero cuyo dialogo en clave hermenéutica, o comparación no epistemológica, resulta de enorme importancia para acceder a claves interpretativas mucho más refinadas y eficaces del fenómeno en examen, como la presente investigación sugiere.

Palabras claves: palabras desconocidas en el texto de un problema, resolución de un problema, imágenes-modelos-esquemas, teoría de las situaciones didácticas, teoría de la objetivación, enfoque semio-cognitivo, comparación entre teorías.

1. Motivazione della ricerca

1.1. Il riesame critico (a distanza di anni) di lavori di ricerca precedenti: un efficace strumento di analisi

È sempre stata parte costituente e significativa della scienza la revisione costante delle basi fondanti della scienza stessa e della consistenza e validità dei suoi risultati specifici. In matematica, in particolare, gli esempi di riformulazione fondazionale e di analisi di risultati a distanza di tempo sono piuttosto comuni, indipendentemente dall'evolversi delle diverse concezioni epistemologiche: la nascita di nuove teorie o di nuove tecniche o di nuovi simbolismi porta a rivedere la produzione matematica anche consolidata con attenzione, profondità e rigore. Valga per tutti l'emblematico esempio della riscrittura degli *Elementi* di Euclide da parte di David Hilbert a 2300 anni di distanza.

A tutto ciò non fa, non può fare eccezione, la nostra disciplina, la didattica della matematica, da noi considerata come uno dei rami costituenti della matematica cosiddetta applicata (all'educazione).¹

Nata circa mezzo secolo fa, grazie ad alcuni pionieri fra i quali svetta il nome di Guy Brousseau, la didattica della matematica ha dovuto in fretta e sostanzialmente dal nulla creare oltre a strumenti e metodi propri, anche principi di verifica e falsificazione, sulla base di quel che avevano fatto decenni prima le scienze empiriche partendo dalle interpretazioni in parte rivoluzionarie di Kuhn, Lakatos, Bunge, Romberg, fra gli altri (D'Amore, 2007; in particolare pp. 335–337).

Cosicché, gli strumenti che man mano venivano proposti dai matematici ricercatori in didattica, elaborati e messi in pratica, erano considerati come provvisori dagli stessi creatori, in attesa di verifiche, smentite, approfondimenti, definizioni più convincenti e analisi dell'attendibilità dei

¹ Per la considerazione che la didattica della matematica si possa considerare come una branca della matematica applicata si veda D'Amore e Fandiño Pinilla (2018), in particolare la nota 3. Tale proposta si basa sulla storia della matematica applicata; su questo aspetto, si veda Stolz (2002).

risultati.

Per limitarci alle ricerche condotte nell'ambito del nostro Nucleo di Ricerca (NRD, fondato nel 1984 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna e tuttora attivo presso la stessa sede), ricordiamo come, per esempio, poco dopo la prima pubblicazione di Raymond Duval relativa all'introduzione della semiotica nell'ambito dell'analisi dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica (Duval, 1993) si svilupparono specifiche ricerche su argomenti particolari relativi allo stesso tema.

Per esempio, in D'Amore (1998) si prendeva in esame il punto di vista strutturale duvaliano nel caso specifico di rappresentazioni semiotiche (in registri e modalità diverse) di relazioni binarie, per verificare se davvero lo studente era o non era in grado di riconoscere lo stesso "senso" (*Sinn* nell'interpretazione fregeana) anche in caso di trasformazioni semiotiche come la conversione e il trattamento (argomento quest'ultimo che portò a specifici lavori di ricerca: D'Amore, 2006a, b; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Santi, 2010, 2012; Rojas Garzón, 2014).

Ma l'autore stesso e i suoi collaboratori più stretti, a distanza di anni, si sono resi conto di come gli sviluppi critici che oggi permettono di definire assai meglio criteri di ricerca, attendibilità nell'analisi dei risultati, significatività degli stessi, oltre a considerare una messa in campo di metodologie specifiche, potevano dichiarare come non del tutto pertinenti le interpretazioni date ai risultati ottenuti allora, quando questi criteri erano, rispetto alle modalità attese e diffuse al giorno d'oggi, piuttosto superficiali, dato che la ricerca non aveva ancora sviluppato sistemi realmente adeguati e significativamente coerenti dal punto di vista scientifico.

Furono varie, di conseguenza, le occasioni nelle quali lo stesso autore e i suoi collaboratori auto-criticarono le conclusioni di quel lavoro.

Lo stesso discorso si può fare anche in relazione ad altri lavori di ricerca che vennero pubblicati negli anni '90. Eppure si tratta di risultati che hanno avuto una indubitabile diffusione internazionale, tradotti come furono in varie lingue e pubblicati in riviste e libri di altri Paesi, spesso oggetti di relazioni, conferenze, seminari, tesi di dottorato.

Sembrò una conferma della validità di questo atteggiamento critico quando, nel 2018, l'importante rivista messicana *Educación Matemática*, in occasione del XXX anniversario della sua fondazione, chiese ad alcuni degli autori che avevano pubblicato in essa attorno agli anni 2000, che rivedessero in chiave critica i propri articoli, proprio da questo punto di vista.

Fu così che l'autore dell'articolo D'Amore (2000) fu invitato a rivedere i contenuti, i metodi, i temi, i risultati di quel lavoro a distanza di 20 anni (circa) proprio per evidenziarne gli aspetti critici.

Nacque così uno studio (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2018) che analizzò daccapo quel lavoro, ma con gli occhi e i criteri di oggi. Il risultato di questa revisione scientifica dettagliata ci appare oggi di straordinario interesse:

l'apparato analitico e critico sviluppato in due decenni mostra tutta la fragilità del discorso che, pochi decenni prima, sembrava stabile e non vacillare affatto.

Dunque, si sta diffondendo come tema di ricerca internazionale la possibilità/necessità di analizzare lavori di ricerca nel campo della didattica della matematica degli anni '80 e '90, come motivo fondante di una nuova e più attendibile base scientifica della ricerca nel nostro campo di indagine.

Una tale attività di ricerca, che potrebbe iscriversi in una dimensione epistemologica della didattica della matematica, può essere utile al progresso della conoscenza scientifica della disciplina in quanto consente di "attualizzare" risultati precedentemente ottenuti, salvando dall'oblio parti preziose della sua memoria storica. Ma i motivi che ci spingono ad agire in tale direzione vanno naturalmente oltre al piacere dovuto alla conservazione di stralci di memoria.

Negli ultimi due decenni la produzione scientifica in didattica della matematica è cresciuta con una velocità sorprendente e capita di frequente che vengano riproposte ricerche completamente nuove su argomenti oramai classici, senza che si presti troppa attenzione all'inquadramento delle ricerche precedenti in chiave attuale. Inoltre, dato che di solito le ricerche "nuove" su un dato argomento sono collocate all'interno di teorie che o non esistevano all'epoca in cui sono state proposte le ricerche precedenti oppure hanno subito un'evoluzione notevole rispetto ad allora, gli attuali risultati appaiono come nuovi perché ottenuti con strumenti completamente diversi, attuali, mentre spesso o sono nuovi in quanto ottenuti con lenti più potenti oppure sono già esistenti, ma attualizzati; fatti, questi, che favoriscono una sempre maggiore compartimentazione delle ricerche nell'ambito delle diverse teorie. Quest'ultimo aspetto rende difficoltosa la comunicazione e fruizione dei risultati a livello pratico, nonostante gli importanti sforzi compiuti a livello meta-teorico nella direzione di una maggiore comunicazione tra teorie (a titolo esemplificativo citiamo qui solo una delle opere fondamentali in tal senso: Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008, ma gli esempi potrebbero essere assai numerosi).

1.2. *Un caso specifico*

Tornando alla presente ricerca, fra i numerosi lavori prodotti nel nostro Nucleo negli anni '90, uno dei più noti, è senza dubbio D'Amore (1997); in esso si proponevano domande di ricerca del tipo seguente:

Supponiamo che un giovane allievo di scuola primaria, leggendo il testo di un problema, incontri una parola il cui significato gli appare sconosciuto; quale sarà la sua reazione? Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà per il disagio provocato dal non comprendere una parola del testo? La scelta dell'allievo dipende dal ruolo che ha la parola per la risoluzione del problema? O dalla posizione occupata dalla parola sconosciuta nel testo? Quella parola, necessaria per la costruzione di un modello descrittivo "reale" della situazione-problema

proposta nel testo, serve davvero per la sua risoluzione?

Quasi tutti coloro (docenti di scuola primaria o ricercatori) cui veniva posta la domanda tendevano a rispondere che l'allievo si sarebbe fermato: incapace di farsi un'immagine realistica della situazione, avrebbe interrotto il proprio processo risolutivo. In altre parole, era considerato plausibile che un giovane allievo non risolve un problema nel cui testo appare una parola a lui totalmente sconosciuta. Quel che variava, semmai, era la giustificazione proposta per questo abbandono: si assisteva da un lato, come detto, alla spiegazione legata all'incapacità di farsi un modello interpretativo all'interno del quale operare, dall'altro a una sorta di blocco affettivo.

L'iter della successiva prova di conferma di tali aspettative fu il seguente: si propose agli studenti un testo molto elementare nel quale si trattava un caso di compravendita di matite da parte di un cartolaio; ma, mentre in una versione appariva la parola ben nota "matite", nell'altra versione appariva al suo posto il nome inesistente "orettole". Tale termine non incide sul processo risolutivo razionale o logico, ma certamente sul processo di immedesimazione nella realtà, nell'immaginarsi quanto descritto nel testo nella realtà empirica. Il risultato della prova poteva apparire sconcertante: la percentuale di risposte corrette era alto, all'incirca uguale nei due casi (D'Amore, 1997).

L'intervista condotta successivamente rivelò che gli studenti non erano affatto interessati al significato di quella specifica parola ma assai più al contesto imposto dalla situazione; per contratto didattico o per altri motivi; la loro propensione non consisteva nell'interpretare o immaginare in dettaglio la situazione, ma nel risolvere comunque il problema: poco importava che tutte le parole utilizzate nel testo fossero comprese appieno.

Alla domanda specifica del ricercatore, uno studente dichiarò che, probabilmente, queste "orettole" erano delle "bettole"; ora, che un cartolaio compri per il suo negozio delle bettole e le rivenda è alquanto improbabile, almeno per un adulto; la situazione dialogica mostrava dunque solo che quel bambino aveva agito sostituendo alla parola inesistente un'altra parola udita, ma altrettanto sconosciuta, solo per assonanza. E questo gli era sufficiente per decidere quale dovesse essere la strategia risolutiva da adottare. Cosicché il ricercatore decise di introdurre in successive prove una terza versione del testo, nella quale la parola senza senso veniva sostituita da una parola ancora del tutto inesistente, ma quasi impronunciabile e per nulla simile per assonanza ad altre parole della lingua italiana, la *parola* "przxtetqzyw".

Ebbene, la percentuale di risoluzioni positive del problema non diminuì, se non in maniera minima, irrilevante; e, questa volta, non c'era alcuna spiegazione legata al senso conosciuto; fra gli studenti intervistati, uno dichiarò che non si era chiesto che cosa volesse dire quella parola, pensando che poteva trattarsi, per esempio, di una marca di caramelle; questo studente, dunque, aveva dato spontaneamente un senso alla situazione descritta pur di farsene un'immagine realistica.

Il che definitivamente sembra dimostrare che non serve conoscere il significato di tutti i termini usati nel testo che descrive una situazione problematica per risolverla, quando il contesto logico o quello algoritmico sono chiari, soprattutto quando la parola non influenza il processo risolutivo.

Sembra tutto così significativo, ben spiegato e ovvio, fino a che, con capacità critica maturata grazie ad anni di studio e di pratica sempre più analitica nella ricerca, si analizza puntualmente ogni fase del lavoro di ricerca descritto in quell'articolo.

Ci si rende conto, allora, che l'apparato messo in piedi per giungere alle conclusioni nel 1997, oltre 20 anni fa, è lacunoso, poco critico, poco scientifico, stando almeno alle modalità analitiche attuali.

Viene spontaneo domandarsi se queste lacune sono poco consistenti e comunque tali da rendere accettabili i risultati della ricerca, o così gravi da metterne in dubbio i risultati stessi. Se non sia il caso di ripensare all'interpretazione dei dati di tale ricerca, eseguendone una nuova edizione, per essere certi che le deduzioni di allora siano accettabili o se si debbano fare deduzioni diverse.

Possediamo oggi metodologie di indagine incredibilmente più potenti, una capacità critica, analitico-interpretativa che ci permette di essere più scientifici al momento di rispondere alle domande di ricerca. E questo è un punto a favore di un attento riesame della questione.

Ma ce n'è un altro; oggi sappiamo con assoluta certezza che la risposta a una domanda di ricerca è condizionata dalla teoria che si mette in campo per compiere la ricerca stessa e, viceversa, la risposta a una domanda di ricerca condiziona la teoria stessa, nel senso che può corroborarla, modificarla o metterla in discussione.

A fine anni '90, una teoria che oggi sembra idonea almeno a mettere in discussione le interpretazioni dei risultati ottenuti in una ricerca come quella fin qui descritta, la teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 2004, 2006a; Santi, 2011; D'Amore, 2018), era nata ma assai poco diffusa. D'altra parte, anche l'approccio semio-cognitivo (Duval, 1993, 1995, 2017) era già nato, ma era ancora agli albori e la ricerca dei primi anni '90 da noi citata non fece ricorso agli strumenti semiotici che essa mette a disposizione. Se ci si chiede "come" hanno reagito i soggetti della ricerca, si ha forse un'adeguata risposta in quella fornita nel 1997 nell'articolo stesso; ma se ci si chiede il "perché", allora ci si rende conto che in quel lavoro di ricerca non c'è traccia di questo aspetto, mentre l'attuale sviluppo della TO e dell'approccio semio-cognitivo di Duval possono, potrebbero, dare una risposta significativa, dato che offrono strumenti di analisi nuovi orientati proprio in tale direzione.

Questi sono i motivi fondamentali che ci hanno spinto a produrre il presente lavoro, impostando una nuova ricerca; nuova, dato che cambia il quadro teorico di riferimento, e cambiano complessivamente anche le

domande di ricerca,² ma dichiaratamente ancorata alla precedente, con lo scopo di ottenere chiavi interpretative più raffinate ed efficaci del fenomeno in esame. Per quanto la sperimentazione si presenti come formalmente identica alla precedente nel suo contenuto testuale problematico, in realtà cambia radicalmente, come si evince dalle domande di ricerca esposte nel paragrafo 2.2., dato che la rappresentazione e l'interpretazione dei dati e dei risultati sono pensati all'interno di un nuovo quadro teorico (che ha, fra i suoi scopi, proprio quello di trovare i motivi alla base dei comportamenti dei giovani soggetti della ricerca), quadro teorico del tutto diverso da quello del lavoro che assumiamo come precedente, ispiratore di questo nuovo.

Abbiamo così deciso di riunire le forze di vari ricercatori, ciascuno esperto in specifici campi di analisi, e compiere questa nuova ricerca basata sul testo della precedente, con tre modifiche sostanziali:

- a) scegliere in base a criteri più attuali gli strumenti di ricerca;
- b) usare come teoria di riferimento sia la TO sia l'approccio semio-cognitivo, con prerogative e strumenti propri (che descriveremo in dettaglio); ovviamente, nella descrizione e nell'interpretazione dei risultati dovremo tener conto di differenze oggettive rispetto ai canoni tipici soprattutto della TO, differenze che porremo noi stessi in evidenza;
- c) proporre una spiegazione dei risultati della ricerca precisa e oggettiva, non influenzabile da attese personali.

Il controllo metodologico, critico, interpretativo ci sembra essere garantito sia dal fatto che i membri che partecipano a questa ricerca sono tutti esperti, ma spesso in domini diversi, sia dal fatto che, avendo scelto di comune accordo il quadro teorico di riferimento, le eventuali discussioni interpretative analitiche non saranno generiche o aperte, ma strettamente connesse ai risultati che quel quadro teorico ha insegnato a vagliare e riconoscere come coerenti con esso.

È dunque per tutti questi aspetti che questo gruppo di ricercatori, coadiuvato da un notevole numero di sperimentatori, ha deciso di collaborare a questa nuova ricerca.

Il primo scopo specifico è cercare di chiarire se, davvero, i risultati empirici riscontrati nella prima ricerca sono confermati e attendibili e se è possibile individuare categorie di risposte non prese in considerazione in precedenza.

Il secondo scopo è verificare se strumenti più moderni conducono a risultati di ricerca diversi.

Il terzo è mostrare come un quadro teorico eterogeneo sia in grado di spiegare e di dare interpretazioni del comportamento del soggetto preso in esame. Ribadiamo che, in passato, nella ricerca in didattica della matematica questi aspetti erano quasi del tutto trascurati; è solo da pochi decenni che le

² Come si evince dal paragrafo 2.2, alle domande di ricerca del 1997, si aggiungono altre domande, determinate dagli obiettivi della presente ricerca.

ricerche in didattica della matematica mettono in evidenza l'importanza notevole della descrizione della teoria nell'ambito della quale si compie la ricerca e degli strumenti metodologici (teorici ed empirici) dei quali ci si serve nel corso di essa.

Il quarto scopo è di porre in relazione, nel corso dell'esame finale dei risultati, gli strumenti teorici disponibili all'epoca della ricerca condotta negli anni '90 (la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau) e gli strumenti teorici scelti fra quelli resi disponibili da altre teorie o approcci di ricerca successivi (in particolare, la teoria dell'oggettivazione di Radford e l'approccio semio-cognitivo di Duval) per verificare se essi siano del tutto irriducibili l'uno all'altro o se, almeno in questo caso, vi siano punti di contatto nel senso di quella che oggi si chiama "unificazione" (almeno parziale) "delle teorie" (Radford, 2008b; Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008). Su questo stesso tema, si veda Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori e Santi (2020a, b).

2. Quadro teorico e domande di ricerca

Di seguito discutiamo alcuni concetti fondamentali per l'inquadramento teorico della ricerca, formuliamo le domande di ricerca e discutiamo le ragioni che ci hanno indotto a scegliere le due componenti chiave del quadro teorico: la TO e l'approccio semio-cognitivo.

2.1. Il significato degli oggetti matematici: teorie realiste e teorie pragmatiche

Un punto di vista efficace per analizzare i processi di apprendimento-insegnamento della matematica è considerare l'attività matematica come una possibile risposta all'intrinseco bisogno dell'essere umano di interpretare la realtà che lo circonda. Berger & Luckmann (1997) muovono i propri passi dall'antropologia filosofica di Gehlen (1956) e osservano che l'essere umano è caratterizzato da un corredo istintuale inadatto ad affrontare l'ambiente naturale nel quale si ritrova a vivere. Pertanto, esso si trova da un lato in una condizione di vulnerabilità rispetto ad altre specie viventi, dall'altro la sua intrinseca debolezza lo porta a una apertura dialettica nei confronti del mondo sulla base della quale esso è al contempo prodotto dall'attività umana e motore della produzione stessa. L'uomo si oggettiva in una molteplicità di mondi, creando un ordine culturale e simbolico che fornisca la stabilità e il significato che gli sono intrinsecamente mancanti. Queste oggettivazioni si realizzano socialmente attraverso processi di istituzionalizzazione e tipizzazione di azioni in schemi e routine che modellano la nostra esperienza umana a livello cognitivo. Schemi e routine orientano le nostre percezioni e le nostre interpretazioni del mondo e si compongono in strutture di aspettativa sul comportamento della realtà che sono fondamentali per la nostra identità

cognitiva, psichica e affettivo-relazionale. Nell’ambito dei processi di insegnamento-apprendimento riconosciamo in questi modelli di oggettivazione i *frames* di Bateson (1976) e gli *scripts* di Schank e Abelson (1977) (D’Amore, 1999). Per quanto riguarda la matematica, Radford (2014a) sostiene che:

Nell’ambito di questa prospettiva teorica, il nostro dominio cognitivo può essere compreso solo come una forma senziente, costituita culturalmente e storicamente, di rispondere creativamente, agire, sentire, immaginare, trasformare e dare significato al mondo. (Radford, 2014a, p. 350)

In quest’ottica, anche la matematica, nel suo sviluppo storico, sociale e culturale, può essere considerata uno dei possibili “mondi” che l’essere umano ha oggettivato per interpretare e prevedere la realtà nel rispondere al suo bisogno di stabilità, di senso e di adeguate strutture di aspettativa. Nell’ambito della didattica della matematica, questo punto di vista nei confronti del pensiero e del sapere matematico rientra in quella che si usa chiamare svolta “antropologica” (D’Amore, 2003), in quanto privilegia il ruolo dell’essere umano nello studio dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica.

D’Amore (2003) delinea due categorie nelle quali possono essere suddivise le teorie del significato in matematica: le *teorie realiste* e le *teorie pragmatiche*. Analizzeremo queste due posizioni nei confronti del significato, individuando il ruolo assunto dalle rappresentazioni semiotiche nella cognizione in matematica. Duval (2006) attribuisce alla matematica un funzionamento cognitivo specifico riconducibile alla intrinseca inaccessibilità dei suoi oggetti di conoscenza, funzionamento che assegna alla semiotica un ruolo costitutivo nel pensiero e nell’apprendimento di questa disciplina. Egli afferma che in matematica “*non c’è noetica senza semiotica*” (Duval, 1995) e per sottolineare l’intreccio tra semiotica e cognizione chiama il funzionamento cognitivo specifico della matematica *semio-cognitivo* (Duval, 2017).

Nelle *teorie realiste* il significato si realizza in una relazione convenzionale tra i segni ed entità concrete o ideali che esistono *indipendentemente* dai segni stessi. Il segno assume una funzione rappresentazionale e nella prospettiva di Frege (1948) il significato di un’espressione o l’oggetto a cui un segno fa riferimento corrisponde alla *Bedeutung* (a volte tradotta con “riferimento” o “denotazione”) che risulta distinto dal *Sinn* (a volte tradotto con “senso”), ovvero dal modo in cui la *Bedeutung* viene presentata, o il *contenuto* del segno;³ il *Sinn*, a sua volta,

³ Notiamo che, pur usando lo stesso termine (*Bedeutung*, cioè significato), Frege distingue nettamente tra la *Bedeutung* delle frasi proposizionali, che è un valore logico (quindi o vero o falso), e che denota un insieme, all’occorrenza vuoto, i cui elementi verificano tali frasi, e la *Bedeutung* delle frasi che non sono proposizionali e che hanno un senso, ma non una denotazione. Ogni frase di senso compiuto veicola un pensiero, ma solo delle frasi proposizionali è possibile affermare che veicolano un pensiero vero o falso, mentre per le frasi

risulta distinto dalla *rappresentazione (Vorstellung)*, la quale è concepita da Frege come un'idea o un'immagine mentale, dunque qualcosa di soggettivo e personale. Una specifica rappresentazione semiotica (*espressione*) ci permette di accedere all'oggetto (inteso come il *significato* in senso denotazionale) sotto un certo punto di vista determinato dalle caratteristiche della rappresentazione semiotica stessa (*Sinn*). Per esempio, 4×2 e $4 + 4$ sono *Sinn* diversi della stessa *Bedeutung*, il numero naturale 8 (l'oggetto inteso come il significato in senso denotazionale). Come evidenziato da D'Amore (2003), la scelta realista comporta alcune conseguenze epistemologiche relative alla matematica:

- concezione platonica degli oggetti matematici;
- una divisione netta tra pragmatica e semantica;
- la conoscenza è assoluta, oggettiva e si realizza come scoperta di entità e strutture preesistenti;
- le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche.

Nelle *teorie pragmatiche* il significato non si realizza nella relazione segno-oggetto e non assume una funzione principalmente rappresentazionale. Radford (2000, p. 241, corsivo nell'originale) osserva che ci troviamo di fronte a “un cambiamento di posizione teorica, da quella in cui i segni *rappresentano* qualcosa a quella in cui essi ci *permettono* di fare qualcosa”. Questo cambio di funzione attribuita al segno, da rappresentazionale a mediatore delle attività condotte dagli esseri umani, comporta un allargamento di ciò che possiamo considerare come segno in matematica per includere nel mondo della semiotica classica oggetti materiali, gesti, uso deittico del linguaggio naturale ecc. In questa prospettiva, non è possibile operare una distinzione netta tra segno, attività, oggetto matematico e significato. Infatti, D'Amore (2003) definisce gli oggetti matematici come:

simboli di attività culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo e anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici e il loro significato dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione. (D'Amore, 2003, pp. 17–18)

Ripercorriamo, come abbiamo fatto sopra seguendo la proposta di D'Amore (2003), le conseguenze di una posizione pragmatica sulla conoscenza matematica:

- concezione problematica degli oggetti matematici;
- non è possibile una separazione netta tra semantica e pragmatica; pratica matematica, semiotica e significato sono distinguibili in un'analisi, ma

che non sono proposizionali ciò non è possibile. Il significato delle frasi proposizionali coincide con la loro denotazione, mentre il significato delle frasi non proposizionali è il pensiero che esse veicolano (Frege, 1892).

inseparabile nell'emersione e nell'apprendimento della matematica;

- la conoscenza non è assoluta, ma relativa a specifici contesti sociali in cui la pratica attualizza il Sapere matematico che si è reificato in oggetti e strutture nel corso del suo sviluppo storico e culturale. Inoltre, la dualità sapere-significato ha una doppia natura: da un lato il sapere-significato è un costrutto soggettivo, legato alla biografia più intima dell'individuo che si confronta con la pratica matematica realizzata attraverso i mediatori semiotico-culturali; dall'altro, il sapere-significato ha una dimensione culturale e interpersonale e assume il ruolo di oggetto intenzionale al quale l'individuo si rivolge nella sua pratica cognitiva e di apprendimento (Radford, 2006b); questa doppia natura è stata evidenziata con sfumature diverse da Chevallard (1992) e da Godino e Batanero (1994);
- le rappresentazioni semiotiche, nel senso allargato descritto sopra, non hanno significato di per sé ma incarnano significati sociali e storico-culturali attualizzati in specifici contesti di pratica.

Le teorie realiste e le teorie pragmatiche non sono due campi separati e in contraddizione tra loro. Una comprensione esaustiva dei processi di insegnamento-apprendimento richiede di considerare entrambi i punti di vista (D'Amore & Godino, 2006; Santi, 2010, 2011; D'Amore & Santi, 2018).

Proseguendo nello studio del significato in matematica da un punto di vista semiotico, presentiamo in sintesi due teorie forti della didattica della matematica: l'approccio strutturale e funzionale di Duval e la TO di Radford. Nella prima si opera una distinzione tra segno e rappresentazione semiotica, nella seconda si considera il significato come mediatore di pratiche matematiche.

La TO si sviluppa a partire dall'activity theory (Leont'ev, 1978) e la pratica sociale, mediata da artefatti culturali, è il perno della teoria dalla quale derivano i suoi elementi costitutivi:

- il pensiero matematico è una *praxis cogitans* una riflessione mediata in accordo con le forme o le modalità dell'attività degli individui (Radford, 2008a, p. 218);
- gli oggetti matematici sono “modelli fissi dell'attività umana riflessiva inserita nel mondo, in continuo cambiamento, della pratica sociale mediata” (Radford, 2008a, p. 222);
- l'apprendimento è una forma particolare di *praxis cogitans*, “una pratica sociale che si declina come «elaborazione da parte dello studente di una riflessione intesa come relazione attiva e comune con la sua realtà storico-culturale” (Radford, 2007, p. 1790); un processo creativo che permette allo studente di trovare e notare qualcosa che appartiene alla cultura; un processo di *oggettivazione* (Radford, 2002, 2008a);
- i mediatori culturali – costituiti da artefatti materiali e ideali quali per esempio oggetti, gesti, strumenti linguistici e segni – che gli individui

impiegano intenzionalmente nei processi di oggettivazione “per acquisire una forma stabile di consapevolezza, per palesare le nostre intenzioni, per svolgere le loro attività in vista del raggiungimento di un obiettivo” (Radford, 2003, p. 41) sono chiamati *mezzi semiotici di oggettivazione*.

La TO è una possibile e significativa attualizzazione delle teorie pragmatiche. Essa, infatti, realizza da un lato l'intreccio tra pratica sociale, semiotica, sapere matematico e significato, dall'altro la natura duale del significato inteso come incontro tra la dimensione individuale e quella culturale nei processi di oggettivazione.

Nella TO di Radford gli oggetti matematici, come si è detto sopra, sono concepiti come modelli fissi di attività o di sistemi di pensiero costituiti culturalmente e storicamente, “fissi” non in natura, non nella mente, ma nella pratica sociale, mutevole e sempre in divenire. Si tratta dunque di entità che esistono già nel contesto culturale di un individuo alla sua nascita e che per l'individuo appaiono solo come *possibilità* di azione e riflessione specifiche, *potenzialità* o *capacità generative*, ovvero “capacità che vengono offerte agli individui di pensare, riflettere, porre e risolvere problemi in un *modo specifico*” (Radford, 2019, p. 3063). Si “materializzano” o “attualizzano” attraverso forme di azione e di pensiero, codificate storicamente e culturalmente, forme di attività nelle quali si utilizzano anche segni o rappresentazioni: “in generale, i materiali concreti e gli artefatti non possono rivelare la concettualità che sono tenuti a individuare. Essi devono essere incorporati in una *attività* (un particolare) che renda apparente la concettualità di cui sono portatori” (Radford, 2013, p. 28). In altre parole, l'apprendimento è concepito come il risultato di un processo di oggettivazione, un processo sociale, mediato semioticamente, di progressiva e critica presa di coscienza di sistemi di idee, significati culturali, forme di pensiero e di azione (Radford, 2013, 2019).

Se consideriamo l'attività riflessiva mediata come un gioco linguistico alla Wittgenstein (1953) – il quale nelle *Ricerche Filosofiche* osserva che il carattere denotativo del linguaggio è uno dei suoi possibili “usi”, vale a dire uno dei possibili giochi linguistici – i segni non solo mediano le pratiche, ma assumono anche una funzione rappresentazionale.

Raymond Duval agli inizi degli anni '90 del secolo scorso ha condotto una serie di studi pionieristici che hanno mostrato il ruolo centrale che la semiotica assume nella cognizione in matematica e nei processi del suo insegnamento e apprendimento Duval (1988a, b, 1993, 1995, 1996). Per un esaustivo approfondimento degli elementi di base della sua teoria, si rimanda il lettore a D'Amore (2003) e Iori (2017, 2018). Nel presente lavoro, ci limitiamo ad alcune nozioni legate soprattutto al significato in matematica. L'approccio di Duval alla semiotica è di tipo *strutturale e funzionale*. La teoria si fonda sul fatto che gli oggetti matematici non consentono rinvii ostensivi, pertanto l'unico possibile accesso al Sapere matematico è tramite rappresentazioni

semiotiche. Il significato di una rappresentazione semiotica non è riducibile a una relazione convenzionale tra il segno e l'oggetto nella quale un simbolo connota direttamente l'oggetto che, tra l'altro, in matematica è inaccessibile. I segni dispiegano, in matematica, tutta la loro forza nella cognizione quando appartengono a sistemi di segni che Duval nella loro forma elementare chiama sistemi semiotici. Un sistema semiotico ha le seguenti caratteristiche (Duval, 1995; Ernest, 2006):

- un insieme di *segni elementari*;
- un insieme di regole sia per la *costruzione* di ulteriori segni a partire da quelli elementari sia per la *trasformazione* di segni;
- un *significato sottostante* che deriva dalla *relazione tra i segni elementari* che formano le rappresentazioni semiotiche strutturate.

La *struttura* dei sistemi semiotici comporta una ridefinizione del significato degli oggetti matematici che va oltre la riduzione del segno a simbolo convenzionale che sta per l'oggetto. Il segno racchiude in sé sia il rappresentante semiotico (l'espressione o il *Zeichen* di Frege citata sopra) che il modo in cui l'oggetto matematico (il significato in senso denotazionale della *Bedeutung* di Frege) ci si offre secondo la relazione tra segni elementari che costituiscono la rappresentazione semiotica stessa (il senso o *Sinn* di Frege, citato sopra), e che dunque è “il modo con cui il segno è dato” (Frege, 1892, p. 26).

Duval (2006), sulla base del contributo di Frege all'analisi delle caratteristiche dei processi di sostituzione semiotica che permettono lo sviluppo di nuove conoscenze in matematica, individua una *funzione cognitiva* peculiare di alcuni specifici sistemi semiotici (detti *registri*) nello sviluppo della conoscenza in matematica e più in generale scientifica, funzione che deriva dalla possibilità che tali sistemi semiotici offrono di trasformare (sostituire) una rappresentazione semiotica in (con) un'altra per ottenere nuove conoscenze; in particolare, se le rappresentazioni semiotiche coinvolte appartengono al medesimo registro si parla di *trattamento*, altrimenti di *conversione*. Sulla base dei risultati di Duval (1993, 1995), si usa identificare (D'Amore, 2001, 2003) la concettualizzazione con le seguenti operazioni semio-cognitive che caratterizzano l'attività matematica, evidenziando il ruolo costitutivo e non strumentale dei sistemi semiotici nel funzionamento del pensiero in matematica:

- la *scelta dei tratti* distintivi dell'oggetto da rappresentare;
- il *trattamento*, la trasformazione di una rappresentazione semiotica in un'altra rappresentazione semiotica nello *stesso* registro semiotico;
- la *conversione*, la trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione semiotica in un *altro* registro semiotico.

La formazione di immagini e modelli mentali di un concetto matematico (D'Amore, 1999), alla luce dell'inaccessibilità degli oggetti matematici, può

essere interpretata come l'interiorizzazione di queste funzioni semiotiche. Tuttavia, una corretta concettualizzazione e costruzione del significato degli oggetti matematici si scontra con il paradosso cognitivo di Duval (1993) che spinge l'allievo inevitabilmente a identificare l'oggetto matematico con le sue rappresentazioni semiotiche.

Concludiamo questa breve rassegna di possibili posizioni nei confronti del significato in matematica tornando alla prospettiva sociologica e antropologica proposta da Berger e Luckmann (1997). La difficoltà e il disorientamento nei confronti della matematica – riconducibili sostanzialmente all'inaccessibilità dei suoi oggetti e al paradosso cognitivo – porta lo studente ad attivare schemi, routines e strutture di aspettativa, spesso estranee alla matematica, le quali forniscono il senso di stabilità e di controllo che egli sente mancare. La teoria delle situazioni didattiche di Guy Brousseau fornisce una descrizione efficace delle cause del mancato apprendimento e delle condizioni per renderlo più idoneo, analizzando l'evoluzione delle situazioni in aula legate a relazioni umane o sociali. Una nozione fondamentale introdotta da Guy Brousseau è quella di *contratto didattico* che evidenzia l'attivazione di strutture di interpretazione e di aspettativa nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica:

In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata dall'insegnante, l'allievo ha generalmente come compito quello di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare dell'insegnante. Queste abitudini (specifiche) dell'insegnante attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico. (Brousseau, 1986, p. 66)

Al contratto didattico sono associati tipizzazioni di azioni in schemi, routines, rituali delineati come clausole ed effetti. Per un approfondimento di questo tema si rinvia il lettore a D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sarrazy (2010).

Per inquadrare e interpretare il comportamento di allievi che risolvono problemi con un termine linguistico a loro sconosciuto o inesistente, dovremo coordinare le nozioni presentate in questo paragrafo per profilare il loro atteggiamento nei confronti del significato in matematica.

2.2. Le domande di ricerca

Le domande di ricerca sono suddivise in quattro blocchi:

D1. Le domande sulle quali si basa la sperimentazione:

Supponiamo che un giovane allievo di scuola primaria, leggendo il testo di un problema, incontri una parola chiave il cui significato gli appare sconosciuto; quale sarà la sua reazione? Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà per il disagio provocato dal non comprendere una parola chiave del testo? La scelta

dell'allievo dipende dal ruolo che ha la parola per la risoluzione del problema? O dalla posizione occupata dalla parola sconosciuta nel testo? Quella parola, necessaria per la costruzione di un modello descrittivo “reale” della situazione-problema proposta nel testo, serve davvero per la sua risoluzione?

D2. Le domande che mirano a verificare, a circa 30 anni di distanza, la validità dei risultati sperimentali dei primi anni '90.

D2.1. Le differenze tra la percentuale di studenti che risolve comunque il compito è simile nei tre casi, cioè sia che nel testo una data parola chiave sia stata sostituita (da una non esistente, ma con parvenza di una parola esistente o da una palesemente non esistente) o che sia stata lasciata inalterata?

D2.2. Le categorie in cui furono classificate le reazioni degli studenti nel 1997 si confermano e se ne aggiungono delle nuove? Se sì, quali?

D3. Le domande relative a una possibile “attualizzazione” dei risultati della ricerca dei primi anni '90 non solo attraverso la verifica dei dati sperimentali, ma anche attraverso la loro analisi con un quadro teorico differente:

In che senso è possibile ottenere risultati nuovi o “attualizzare” i risultati di una ricerca non solo attraverso la verifica dei risultati sperimentali, ma anche attraverso il ricorso a un quadro teorico diverso rispetto a quello su cui essa si è basata all'epoca, senza modificare la metodologia di ricerca?

D4. Domande di metariflessione sul contributo al dibattito sulle teorie in didattica della matematica del presente lavoro di attualizzazione degli strumenti teorici di una ricerca del passato:

In che senso la presente attualizzazione dei risultati di una ricerca del passato attraverso la reinterpretazione degli strumenti teorici dell'epoca in riferimento a strumenti teorici attuali, può fornire un contributo al dibattito sulle teorie in didattica della matematica, in particolare in riferimento al rapporto tra la TO e la TSD?

Nel paragrafo precedente abbiamo messo in evidenza due elementi che concorrono alla formazione del quadro teorico della presente ricerca: la TO e l'approccio semio-cognitivo. Di seguito spieghiamo quale ruolo viene attribuito a ciascuno di queste due componenti.

2.3. Le componenti del quadro

2.3.1. La TO

Ciò che proponiamo in questo paragrafo non è una discussione della compatibilità tra la TO e la TSD, all'interno della quale si iscrive più o meno implicitamente la ricerca dei primi anni '90. Il nostro obiettivo è di chiarire le motivazioni che ci hanno spinto a inserire la TO nel quadro teorico della presente ricerca.

Tuttavia riteniamo opportuno premettere che le due teorie sono parzialmente comparabili, parzialmente compatibili ed hanno finalità

esplicative parzialmente simili (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020a).

Premettiamo che siamo ben consapevoli del fatto che un'applicazione della TO all'analisi dei dati di una ricerca come quella realizzata nei primi anni '90 può apparire difficilmente giustificabile.

Prima di procedere con l'esposizione delle nostre motivazioni, vogliamo dunque discutere in dettaglio i motivi più evidenti che potrebbero far pensare a una tale difficoltà, se non addirittura impossibilità.

Secondo Radford (2008) una teoria T è una terna $T(P, M, D)$ che è una struttura dinamica costituita da:

- 1) un sistema di principi che caratterizzano la teoria da un punto di vista epistemologico;
- 2) una metodologia che informa le realizzazioni sperimentali della teoria;
- 3) un sistema di domande di ricerca che assumono significato nell'ambito del sistema di principi.

Il sistema di principi della TO può essere riassunto come segue (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020a, p. 43):

P1. La conoscenza è l'attualizzazione o la materializzazione del sapere (inteso come pura possibilità, o come sequenza di azioni codificate storicamente e culturalmente) che si realizza attraverso l'attività (da intendere come lavoro congiunto) di studenti e insegnanti che pensano, sentono e interagiscono nel processo di attualizzazione o materializzazione del sapere.

P2. L'apprendimento è concepito sia in termini di processi di oggettivazione – processi che riguardano la conoscenza, nei quali si diventa progressivamente e criticamente consapevoli di sistemi di idee, significati culturali, forme di pensiero e di azione attraverso l'uso di differenti mezzi semiotici – sia in termini di processi di soggettivazione – processi che riguardano il soggetto, la sua relazione con un mondo che gli è esterno, ovvero “processi di creazione di un sé particolare (e unico)” (D'Amore & Radford, 2017, p. 122).

P3. Nei processi di oggettivazione e soggettivazione, studenti e insegnanti usano vari tipi di mezzi semiotici di oggettivazione (parole, gesti, artefatti, simboli matematici, grafici, ...), i quali incorporano forme codificate di riflessione e di azione, storicamente e culturalmente costituite, permettono l'acquisizione progressiva da parte degli studenti di forme di azione e di riflessione codificate culturalmente (Radford, 2008a).

P4. L'apprendimento è un “adattamento attraverso meccanismi sociali a un mondo di pratiche culturali” (D'Amore & Radford, 2017, p. 116) che si manifesta nei processi di oggettivazione e soggettivazione.

Le domande di ricerca su cui si basa la sperimentazione ai cui dati dovrebbero essere applicati gli strumenti teorici della TO sono sostanzialmente le domande di ricerca del primo blocco, strettamente legate a quelle della ricerca degli anni '90 descritta in D'Amore (1997):

Supponiamo che un giovane allievo di scuola primaria, leggendo il testo di un problema, incontri una parola chiave il cui significato gli appare sconosciuto: quale sarà la sua reazione? Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà per il disagio provocato dal non comprendere una parola chiave del testo? La scelta dell'allievo dipende dal ruolo che ha la parola per la risoluzione del problema? O dalla posizione occupata dalla parola sconosciuta nel testo? Quella parola, necessaria per la costruzione di un modello descrittivo "reale" della situazione-problema proposta nel testo, serve davvero per la sua risoluzione?

Se consideriamo la definizione di teoria fornita all'inizio del paragrafo, è chiaro che, per poter applicare una data teoria (nel nostro caso la TO) in una ricerca, questa deve soddisfare certi requisiti riguardanti le domande di ricerca e le scelte metodologiche. In particolare le domande di ricerca devono assumere significato nell'ambito del sistema di principi della teoria e la metodologia deve informare le realizzazioni sperimentali della teoria.

Se si confrontano le domande di ricerca del primo blocco con i principi della TO, ci si rende conto che, mentre i principi sono espressi in termini di processi (processo di attualizzazione o materializzazione del sapere ...; processi di oggettivazione e soggettivazione ...; acquisizione progressiva da parte degli studenti di forme di azione e di riflessione ...; adattamento ... a un mondo di pratiche culturali che si manifesta nei processi di oggettivazione e soggettivazione ...), le domande di ricerca sono espresse principalmente in termini di risultati (reazioni, risoluzioni fornite, scelte compiute).

Se si confrontano le metodologie di ricerca applicate durante la sperimentazione nei primi anni '90 e riprodotte ora, ci si rende conto che esse non sono in grado di informare le realizzazioni sperimentali della TO, in quanto tali metodologie non contemplano l'uso di strumenti di rilevazione dei processi, come registrazioni audio e video per lunghi periodi di attività sociali, ma, al contrario, contemplano solo strumenti di rilevazione dei risultati, come lo svolgimento di compiti e interviste individuali.

È facile dunque rendersi conto che un'applicazione diretta degli strumenti teorici della TO non è possibile. Il motivo per cui ci siamo soffermati sulla TO, oltre che sull'approccio semio-cognitivo, è stato però proprio il fatto che in essa sono contemplati aspetti che non trovano una corrispondenza diretta nella TSD, implicitamente presente attraverso gli strumenti teorici impiegati, come per esempio il contratto didattico o le immagini e i modelli mentali. Un aspetto che manca nella ricerca dei primi anni '90, ma che potrebbe essere rilevante per la comprensione del fenomeno studiato, è la dimensione socio-culturale, che invece è proprio caratterizzante per la TO. La domanda che ci siamo dunque posti è stata la seguente: è possibile ottenere delle informazioni plausibili sul perché dei risultati della sperimentazione, supposto che venissero confermati, non attraverso un'interpretazione dei risultati sperimentali direttamente nella TO (impossibile), ma attraverso l'interpretazione degli strumenti teorici della ricerca precedente in riferimento agli strumenti teorici

della TO? Per esempio, se i dati sperimentali sono stati analizzati facendo riferimento al contratto didattico, quali informazioni fornisce su tali risultati un'interpretazione del concetto di contratto didattico in riferimento alla TO? L'approccio da noi scelto in questo senso è di tipo ermeneutico, in quanto non si basa su un confronto strutturale tra le due teorie, ma cerca di metterle in comunicazione tramite la creazione di punti di contatto:

Sin embargo, quizás incluso una posible coordinación (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) entre la TO y otras teorías en la educación matemática no debería necesariamente examinarse en términos estructurales, que requieren un examen de los primeros principios y de los componentes empíricos o praxeológicos de las teorías, destinado a verificar su compatibilidad; en este caso, se trataría de un enfoque estático del problema que solo puede proporcionar respuestas lapidarias. Quizás debería buscarse una alternativa en este sentido en términos de un posible *diálogo en clave hermenéutica* entre las teorías, en la cual los significados de las construcciones teóricas en ambas (la TO y otra teoría que se pretendiera involucrar) se redefinan, de ser necesario, a través de un enfoque interpretativo en el cual las teorías son vistas como sistemas que interactúan al interpretar sus respuestas de acuerdo con la epistemología de su estructura interna. Por lo tanto, no se trataría de una simple contraposición o de una yuxtaposición de teorías, pero tampoco de su coordinación en sentido estricto; sin embargo, las teorías se colocarían en una posición de diálogo entre ellas. (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020b, p. 47).

Naturalmente non è detto che un tale dialogo sia sempre possibile ma, nei casi in cui esso sia possibile, i risultati potrebbero essere interessanti, in quanto potrebbero fornire informazioni indirette sul ruolo di elementi che incidono sul fenomeno studiato, ma non sono direttamente rilevabili con gli strumenti metodologici più consoni alla ricerca condotta. In questo senso la TO (o almeno alcuni suoi costrutti teorici) fungerebbe da “mezzo di contrasto” per la rilevazione di questi elementi e tale sua funzione sarebbe giustificata proprio dalle differenze rilevate in precedenza.

L'approccio appena descritto può essere visto come un'applicazione della strategia *contrasting theories*, nata nell'ambito del networking di teorie nella ricerca in didattica della matematica (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008). Come evidenziano gli autori: “Comparing refers to similarities and differences in a more neutral way of perceiving theoretical components, contrasting is more focused on stressing differences. By contrasting, the specificity of theories and their possible connections can be made more visible” (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 9).

Potremmo dunque affermare che in questa parte del quadro teorico mettiamo in atto un dialogo tra teorie, o elementi a esse riconducibili, ma che l'efficacia di tale dialogo per la comprensione del fenomeno si basa proprio sulle loro differenze.

2.3.2. L'approccio semio-cognitivo

Mentre nel caso della TO ciò che ci attraeva maggiormente era la sua caratteristica socioculturale, nel caso dell'approccio semio-cognitivo ciò che ci ha maggiormente attratto è la possibilità di esaminare gli aspetti semiotici non presi in esame nel 1997.

A differenza della TO, nel caso dell'approccio semio-cognitivo non ci sono incompatibilità che devono essere discusse, in quanto esso è idoneo a fornire risposte a domande di ricerca orientate ai risultati e anche la metodologia adottata per la raccolta dati è adatta a tale approccio. Infatti, i protocolli degli studenti e le risposte alle interviste forniscono materiale che è possibile esaminare con gli strumenti semiotici che l'approccio semio-cognitivo offre, mentre la TO richiederebbe di tenere conto della multimodalità semiotica. Inoltre, l'approccio semio-cognitivo non contempla interazioni sociali e quindi le prove individuali sono altrettanto adatte a essere interpretate con i suoi strumenti.

Concludendo, possiamo affermare che, mentre nella scelta della TO come “mezzo di contrasto” hanno avuto molto peso le differenze tra la TSD e la TO stessa, nello scartare quest'ultima riguardo alla dimensione semiotica, a favore dell'approccio semio-cognitivo, hanno pesato le affinità tra la TSD e l'approccio semio-cognitivo, in quanto entrambe sono di carattere cognitivo.

La scelta dell'approccio semio-cognitivo può essere visto come un caso particolare di applicazione del *comparing theories* (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008) nel senso evidenziato in precedenza.

3. Metodologia di ricerca

Le assunzioni metodologiche, insieme a quelle ontologiche, epistemologiche e assiologiche alla base di questa ricerca, sono quelle che caratterizzano il paradigma di ricerca pragmatista che ha origine dai lavori di Charles Sanders Peirce (1839–1914), William James (1842–1910) e John Dewey (1859–1952) (Ormerod, 2006). Sulla base della *massima pragmatica* formulata da Peirce in relazione al significato dei concetti,⁴ il pragmatismo enfatizza il primato della pratica e il valore d'uso delle idee, delle teorie e dei metodi prodotti dalla comunità dei ricercatori in relazione ai diversi contesti d'uso. Lo scopo della ricerca pragmatista, dunque, non è di ottenere risposte certe o assolute alle domande di ricerca, ma di fornire una conoscenza approfondita del fenomeno in esame, una sua spiegazione, previsione e controllo, secondo prospettive differenti, attraverso opportuni metodi di ricerca. Di conseguenza, il paradigma di ricerca pragmatista si focalizza anzitutto sui dati necessari per

⁴ “Considerate quali effetti che potrebbero concepirsi avere conseguenze pratiche noi concepiamo che gli oggetti della nostra concezione abbiano. Allora, la nostra concezione di quegli effetti è la totalità della nostra concezione dell'oggetto” (Peirce, 1878, 5.402).

rispondere a una certa domanda di ricerca e poi sui metodi per ottenere tali dati, usando come unico criterio di scelta l'adeguatezza o l'utilità di un dato metodo di ricerca a fornire una risposta alla domanda di ricerca in questione, ovvero il suo valore pratico. Tale paradigma

si riferisce a una visione del mondo che si focalizza su "ciò che funziona" piuttosto che su ciò che potrebbe essere considerato assolutamente e oggettivamente "vero" o "reale". (...) è utile per guidare i disegni di ricerca, soprattutto quando una combinazione di approcci diversi è filosoficamente incoerente. (Weaver, 2018, p. 2986)

Le assunzioni ontologiche (sulla natura della realtà), epistemologiche (sulla natura della conoscenza), metodologiche (sul processo di ricerca) e assiologiche (sulla natura dei valori e su come i valori del ricercatore possano influenzare la ricerca) che costituiscono il paradigma pragmatista (Weaver, 2018) sono qui di seguito sinteticamente descritte, sulla base dei lavori di Johnson e Onwuegbuzie (2004), di Denzin e Lincoln (2011), di Creswell (2014) e di Maarouf (2019).

Ontologia del paradigma pragmatista: realismo-relativismo. Rifiuta il tradizionale dualismo tra realismo e relativismo, assumendo una posizione moderata riguardo a tutti i dualismi filosofici (razionalismo vs. empirismo, soggettivismo vs. oggettivismo, apparenza vs. realtà etc.), sulla base di come essi funzionano nella risoluzione di problemi. Riconosce comunque l'esistenza e l'importanza sia del mondo fisico o naturale sia del mondo sociale e psichico che include linguaggi, cultura, istituzioni umane e pensieri soggettivi (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Il ricercatore pragmatista non assume dunque una posizione netta circa l'esistenza di un mondo esterno indipendente o dipendente dalla mente. Si muove liberamente dal realismo o realismo critico (rispettivamente) del positivismo e post-positivismo, al relativismo del costruttivismo. Maarouf (2019) concettualizza la posizione ontologica del ricercatore pragmatista in termini di "ciclo della realtà":

Il ciclo della realtà è la posizione ontologica che si basa sull'esistenza di una realtà in un determinato contesto in un determinato momento e percezioni multiple di questa realtà nelle menti degli attori sociali. Le percezioni della realtà da parte degli attori sociali regolano i loro comportamenti e questi ultimi causano cambiamenti del contesto e di conseguenza della realtà. Quando la realtà cambia, il ricercatore pragmatista può passare da una posizione all'altra, quella dell'unica realtà o quella delle molteplici percezioni di questa realtà. (Maarouf, 2019, p. 10)

Le assunzioni del ciclo della realtà permettono dunque al ricercatore pragmatista di passare da una visione realista a una visione relativista, o viceversa, e quindi da un approccio di ricerca quantitativo a un approccio di ricerca qualitativo, o viceversa, in relazione al contesto e ai fenomeni che si presentano nel corso della ricerca.

In altre parole, il ricercatore pragmatista si focalizza non sulla “realtà” o “verità” in senso assoluto, ma su “ciò che funziona” come “realtà” o “verità” in relazione alla domanda di ricerca presa in esame. In ogni caso considera l’essere umano come socialmente e storicamente situato, in grado di conoscere e di controllare il mondo soltanto parzialmente.

Epistemologia del paradigma pragmatista: soggettivista-oggettivista. La conoscenza è considerata sia come costruita sia come basata sulla realtà del mondo di cui abbiamo esperienza e in cui viviamo (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Nella ricerca si accetta sia il punto di vista oggettivistico (indipendenza dell’oggetto di studio dal ricercatore) sia quello soggettivistico (stretta relazione tra l’oggetto di studio e il ricercatore). L’epistemologia del paradigma di ricerca pragmatista evidenzia dunque una forte concettualizzazione della conoscenza come “conoscenza a doppia faccia” (Maarouf, 2019):

Secondo la conoscenza a doppia faccia, qualsiasi tipo di conoscenza può essere vista come osservabile o inosservabile sulla base della posizione ontologica del ricercatore e non sulla natura della conoscenza stessa. Di conseguenza, il ricercatore pragmatista accetta entrambi i tipi di conoscenza sulla base della sua posizione ontologica istantanea e la sua principale preoccupazione è quella di scegliere il giusto metodo di ricerca, quello più appropriato a questa posizione ontologica e che soddisfi al meglio i suoi obiettivi di ricerca. (Maarouf, 2019, p. 8)

Si passa dunque dal dualismo tra ricercatore e oggetto di studio (considerati come due entità indipendenti, non influenzabili l’un l’altro) del positivismo, all’inseparabilità del ricercatore dall’oggetto di studio (per la loro forte interazione) del costruttivismo. Si assume che gli eventi o gli oggetti possano essere soggetti a molteplici descrizioni o interpretazioni; le loro rappresentazioni o misure non possono dunque essere considerate come “vere” in senso assoluto.

Metodologia del paradigma pragmatista: fondata sulle domande di ricerca e sull’approccio dei metodi misti. Il ricercatore pragmatista si focalizza sulle domande di ricerca e combina o integra in modo opportuno metodi e dati di tipo sia qualitativo sia quantitativo per ottenere risposte alle domande di ricerca; si parla in tal caso di *ricerca con metodi misti (mixed methods research)* (Tashakkori & Teddlie, 1998). I metodi e i dati qualitativi e quantitativi sono mescolati in modo da ottenere le migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca. In altri termini, il ricercatore sceglie i metodi, le tecniche e le procedure di ricerca che più soddisfano le ipotesi, le esigenze e gli scopi della sua ricerca.

Assiologia del paradigma pragmatista: i valori come bias necessari. La

ricerca pragmatista non è né libera da valori (come nel positivismo e post-positivismo) né interamente vincolata a valori (come nel costruttivismo). In essa è comunque centrale la *riflessività*, ovvero il processo di riflessione critica sul tipo di conoscenza prodotta dalla ricerca e sul modo in cui tale conoscenza è stata prodotta. In relazione alle precedenti assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche, “il ricercatore pragmatista dovrebbe essere influenzato dai suoi valori solo nella misura necessaria per migliorare la sua ricerca e fornire una risposta alle sue domande di ricerca” (Maarouf, 2019, p. 9), non per distorcere, snaturare, deformare, alterare o manipolare deliberatamente i risultati della sua ricerca. Maarouf (2019) caratterizza tale posizione assiologica mediante “il principio del bias necessario”:

È molto importante qui affermare che “il principio del bias necessario” non significa che qualsiasi forma di bias sia accettabile. Il bias inaccettabile si verifica se il ricercatore ha orientato i risultati della sua ricerca in un verso predeterminato per riflettere determinati valori in cui crede. (Maarouf, 2019, p. 10)

Nel paradigma di ricerca pragmatista vi è dunque un'interazione dinamica tra le domande di ricerca e le assunzioni ontologiche, epistemologiche, metodologiche e assiologiche del ricercatore.

In linea con il paradigma di ricerca pragmatista, in questa ricerca la metodologia si è basata sulle domande della ricerca condotta negli anni '90, riassunta nel paragrafo 1 e descritta in dettaglio in D'Amore (1997), che riportiamo qui di seguito per richiamare l'attenzione sulle sue principali caratteristiche, quelle più rilevanti per l'identificazione del disegno di ricerca:

Supponiamo che un giovane allievo di scuola primaria, leggendo il testo di un problema, incontri una parola chiave il cui significato gli appare sconosciuto; quale sarà la sua reazione? Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà per il disagio provocato dal non comprendere una parola chiave del testo? La scelta dell'allievo dipende dal ruolo che ha la parola per la risoluzione del problema? O dalla posizione occupata dalla parola sconosciuta nel testo? Quella parola, necessaria per la costruzione di un modello descrittivo “reale” della situazione-problema proposta nel testo, serve davvero per la sua risoluzione?

Per rispondere a tali domande di ricerca occorre in primo luogo focalizzare l'attenzione sulle qualità degli enti, delle relazioni e dei fenomeni presi in esame (... *quale sarà la sua reazione?*, *Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà...* *La scelta dell'allievo dipende dal ruolo... dalla posizione...?*), piuttosto che sulle loro quantità, misure o frequenze (*Supponiamo che un giovane allievo...*); occorre altresì focalizzare l'attenzione sui significati o sui sensi attribuiti a fenomeni, situazioni o esperienze (*il disagio provocato dal non comprendere una parola chiave del testo, la costruzione di un modello descrittivo “reale” della situazione-problema proposta nel testo*). Sono dunque richiesti anzitutto dati di natura qualitativa (non numerici). In secondo

luogo, per individuare regolarità o peculiarità nei dati raccolti e rispondere alle domande di ricerca occorre *quantificare* i dati qualitativi, ovvero convertire i dati qualitativi in dati quantitativi (Sandelowski, Voils, & Knafl, 2009). A tale scopo, è necessario identificare *categorie* ovvero sintetiche descrizioni dei dati raccolti oppure *temi*, ovvero parole o sequenze di parole che denotino idee o comportamenti che i dati hanno evidenziato o fatto emergere con una certa frequenza e le loro relazioni, per descrivere e interpretare in modo più completo i dati raccolti (Johnson & Christensen, 2014).

È stato dunque elaborato un disegno di ricerca con metodi misti costituito da due fasi (Figura 1):

- 1) raccolta di dati qualitativi (QUAL) di due tipi: (a) testi scritti, nella risoluzione di un quesito di matematica, da tutti gli allievi partecipanti; (b) risposte verbali di alcuni allievi partecipanti, trascritte dagli insegnanti sperimentatori, nelle interviste effettuate subito dopo la risoluzione scritta del quesito di matematica;
- 2) analisi qualitativa e quantitativa (QUAL + quan) dei dati raccolti.

Il disegno di ricerca si può schematizzare nel modo seguente:

$$\text{QUAL} \rightarrow \text{QUAL} + \text{quan.}^5$$

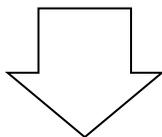
In ogni fase della ricerca lo studio quantitativo (quan) è stato sempre al servizio di e secondario a quello qualitativo (QUAL) dominante.

Per la raccolta dei dati sono stati utilizzati i seguenti metodi di rilevazione: quesiti matematici di sei tipologie differenti, tutti a risposta aperta, interviste strutturate (costituite da due domande a risposta aperta prestabilite) (QUAL).

La procedura di campionamento e le tipologie dei quesiti somministrati sono descritti in dettaglio nei prossimi paragrafi.

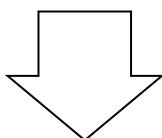
⁵ “Qual” sta per qualitativo, “quan” sta per quantitativo, “+” sta per simultaneo, “→” sta per sequenziale; le lettere maiuscole denotano una priorità elevata, le lettere minuscole denotano una priorità bassa delle componenti qualitativa e quantitativa di uno studio in un approccio alla ricerca di tipo misto. (Per approfondire si veda, per esempio, Johnson & Onwuegbuzie, 2004).

Domande di ricerca



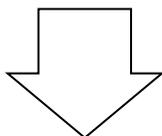
QUAL

Raccolta di dati qualitativi: testi scritti dai partecipanti nella risoluzione individuale di un quesito di matematica, risposte di alcuni partecipanti nelle interviste individuali strutturate



QUAL + quan

Analisi qualitativa (identificazione di categorie) e analisi quantitativa dei dati raccolti e loro integrazione in relazione alle domande di ricerca



Risultati

e confronto con le domande di ricerca

Figura 1. Disegno di ricerca a modello misto di tipo: QUAL → QUAL + quan.

4. Dati e modalità generali della sperimentazione

4.1. Campione di sperimentazione

Alla sperimentazione hanno partecipato complessivamente 17 insegnanti sperimentatori e 18 classi quinte di scuola primaria, per un totale di 349 alunni, ripartiti come segue: 9 insegnanti con 10 classi (complessivamente 205 alunni) di scuole situate sul territorio italiano; 8 insegnanti con 8 classi (complessivamente 144 alunni) del Canton Ticino (Svizzera).

4.2. Metodologia di sperimentazione

La sperimentazione è stata svolta nel modo seguente:

- *Presenza di contatto.* Nel mese di agosto 2019 sono stati contattati 30

potenziali insegnanti sperimentatori in Italia e in Ticino, ai quali sono state fornite alcune informazioni generali relative allo scopo di tale sperimentazione, chiedendo la loro disponibilità a partecipare ciascuno con una classe quinta non propria. L'adesione al progetto doveva avvenire entro un mese.

- *Consegna dei materiali.* Agli insegnanti che hanno dato la disponibilità a partecipare alla sperimentazione sono stati inviati i seguenti materiali: (a) una lettera in cui venivano descritte in dettaglio le modalità della sperimentazione; (b) i testi dei problemi della sperimentazione (vedi paragrafo 4.3.1.).
- *Somministrazione della prova in classe.* Nel mese di ottobre 2019 i docenti sperimentatori hanno somministrato e raccolto le prove nelle classi coinvolte e hanno successivamente svolto delle interviste secondo le modalità specificate nella lettera loro inviata, ponendo le domande ivi indicate e annotando le risposte degli alunni.
- *Consegna del materiale.* Il materiale raccolto dagli insegnanti sperimentatori è stato consegnato a due ricercatori, che sono anche autori dell'articolo, i quali hanno proceduto con l'analisi dei dati.

4.3. Modalità della sperimentazione in classe

La sperimentazione in classe si è svolta in due fasi consecutive: nella prima sono stati somministrati dei testi per lo svolgimento di un compito individuale scritto; nella seconda l'insegnante sperimentatore ha condotto delle brevi interviste con una parte degli studenti, secondo le modalità indicate nelle informazioni preliminari.

4.3.1. Prima parte della sperimentazione

La fase della somministrazione dei compiti scritti si è svolta secondo le seguenti modalità:

- La classe è stata divisa in 6 gruppi (denominati G1-G2-G3-G4-G5-G6) come segue:
G1-G2-G3-G4 sono composti ciascuno da 2 studenti scelti a caso; G5-G6 sono composti dal numero restante di studenti, divisi a caso in 2 parti uguali, a meno di numeri dispari; per esempio, se la classe è composta da 23 studenti (contando solo quelli presenti quel giorno): G5 e G6 sono composti da 8 e 7 studenti (o viceversa). Se sono presenti alunni segnalati come con bisogni educativi speciali, questi bambini vengono inseriti nel gruppo G1 e svolgono la prova secondo le modalità consuete e con gli strumenti di cui fanno uso abitualmente. Inoltre, eventuali bambini di origine straniera con scarse conoscenze linguistiche, vengono inseriti nel gruppo G1.
- A ciascun membro del gruppo Gn è stato consegnato un foglio (di

dimensione A4) sul quale è scritto il testo del problema An.

- Prima della consegna dei fogli, agli alunni è stato comunicato che le prove sono strettamente individuali e che l'attività non è soggetta a valutazione; è stato chiesto loro inoltre di scrivere solo il proprio nome sul foglio, senza il cognome.
- Ogni studente è stato invitato a risolvere il problema che gli è stato affidato nel tempo che reputa necessario, senza porre limiti di tempo.

I testi somministrati secondo le modalità descritte sono i seguenti:

TESTO A1: *Un cartolaio compra 4 matite corte, 6 matite lunghe e 12 matite medie. Quante matite compra in tutto?*

TESTO A2: *Un cartolaio compra 4 orettole corte, 6 orettole lunghe e 12 orettole medie. Quante orettole compra in tutto?*

TESTO A3: *Il signor Piero fa il commerciante. Compra 60 matite a 2 euro l'una e le rivende tutte, incassando 240 euro. Quanto guadagna per ogni matita?*

TESTO A4: *Il signor Piero fa il commerciante. Compra 60 orettole a 2 euro l'una e le rivende tutte, incassando 240 euro. Quanto guadagna per ogni orettola?*

TESTO A5: *Un cartolaio compra 4 przxetqzyw corti, 6 przxetqzyw lunghi e 12 przxetqzyw medi. Quanti przxetqzyw compra in tutto?*

TESTO A6: *Il signor Piero fa il commerciante. Compra 60 przxetqzyw a 2 euro l'uno e li rivende tutti, incassando 240 euro. Quanto guadagna per ogni przxetqzyw?*

I testi A1, A2 e A5 sono chiamati di seguito “di tipologia additiva” poiché in essi l'operazione risolutiva è un'addizione. I tre testi si distinguono tra loro solo per il termine che è stato usato per designare gli oggetti su cui verte il quesito. Nel testo A1 tali oggetti sono chiamati “matite”; nel testo A2 sono chiamati “orettole”; nel testo A5 sono chiamati “przxetqzvw”.

I testi A3, A4 e A6 sono di seguito chiamati “di tipologia mista” per distinguerli da quelli della prima tipologia, dato che, nella loro risoluzione, sono coinvolte più operazioni. Anche in questo caso i tre testi si distinguono tra loro solo per il termine che è stato usato per designare gli oggetti su cui verte il quesito. Nel testo A3 tali oggetti sono chiamati “matite”; nel testo A4 sono chiamati “orettole”; nel testo A6 sono chiamati “przxetqzvw”.

4.3.2. Seconda parte della sperimentazione

Le interviste sono state condotte secondo le seguenti modalità:

- Sono state svolte al termine delle prove scritte.
- L'insegnante sperimentatore ha intervistato individualmente 2 studenti per ciascuno dei seguenti 4 gruppi: G2-G4-G5-G6. Gli studenti da intervistare dei gruppi G5 e G6 sono stati scelti sorteggiando casualmente i testi, mentre dei gruppi G2 e G4 sono stati intervistati entrambi i bambini. Ogni intervista ha avuto la durata di circa 4-5 minuti. Nell'intervista sono state

poste le seguenti domande: *Che cosa hai pensato quando hai letto il problema? Come hai fatto per risolverlo?* In caso di mancata risoluzione scritta, l'insegnante sperimentatore ha chiesto allo studente il motivo della mancata risoluzione.

5. Analisi dei protocolli e delle interviste

5.1. Dati generali

I quesiti sono stati somministrati a 343 alunni sui 349 inizialmente coinvolti; alcuni non li hanno potuti risolvere per vari motivi contingenti.

Sono state condotte 141 interviste. Secondo la programmazione della sperimentazione, il numero di interviste avrebbe dovuto essere di 8 per classe, 2 per ciascuno dei quesiti A2, A4, A5 e A6, quindi in totale 144 interviste; tuttavia in una classe erano presenti quel giorno solo 9 alunni e, seguendo le regole per la suddivisione dei gruppi, il gruppo A5 era composto da un solo alunno e nel gruppo A6 non vi era alcun alunno. Questi dati sono riassunti in Tabella 1.

Tabella 1

Dati generali della sperimentazione

Testo	Numero di alunni a cui è stato somministrato il testo	Numero di interviste condotte
A1	40	0
A2	36	36
A3	38	0
A4	36	36
A5	101	35
A6	92	34
Totale	343	141

5.2. Dati relativi alle prove scritte

I dati provenienti dall'analisi delle prove scritte sono stati organizzati secondo le seguenti modalità: i dati dei singoli quesiti sono stati rappresentati in singole tabelle; successivamente i dati dei quesiti di tipo additivo e i dati dei quesiti di tipo misto sono stati riassunti rispettivamente in due tabelle. In queste tabelle riassuntive sono stati messi a confronto i risultati delle tre diverse versioni di ciascuna tipologia: testo "standard" con parole tutte note; testo con parola sconosciuta "orettole"; testo con parola sconosciuta "przetqzvw".

Le categorie secondo le quali sono state classificate le risposte in parte

erano già stabilite a priori, in parte sono state aggiunte categorie sulla base delle informazioni emerse durante l'analisi.

a) Analisi dei dati dei test di tipologia additiva (testi A1, A2, A5)

Riportiamo in Tabella 2 le classificazioni delle risposte alla prima tipologia di quesiti, secondo le categorie, stabilite a priori: “risolve correttamente” e “non risolve correttamente”, e con l’aggiunta della categoria “sbaglia il calcolo ma l’operazione impostata è corretta”, inserita sulla base della presenza di protocolli che presentavano questa caratteristica.

Tabella 2
Risultati relativi ai test A1, A2 e A5

	Testo A1 ("standard")	Testo A2 ("orettole")	Testo A5 ("przetqzvw")
Risolve correttamente	92,5%	89,0%	91,0%
Non risolve correttamente	7,5%	11,0%	4,0%
Sbaglia il calcolo ma l'operazione impostata è corretta	0%	0%	5,0%

b) Analisi dei dati dei test misti (testi A3, A4, A6)

Riportiamo in Tabella 3 le classificazioni delle risposte alla seconda tipologia di quesiti, secondo le seguenti categorie: “risolve correttamente” e “non svolge il compito” (stabilite a priori e non modificate in seguito); “fornisce una risposta sbagliata perché confonde i termini tecnici *incasso* e *guadagno*”; “svolge calcoli a caso o inventa procedimenti che inducono in errore”; “manifesta disagio che pregiudica lo svolgimento o la consegna del compito”. La terz’ultima e la penultima categoria erano in parte già ipotizzate a priori, sulla base dell’esperienza della sperimentazione analoga svolta nei primi anni ’90 (D’Amore, 1997), ma sono state comunque raffinate e adattate sulla base dell’esame dei protocolli che presentavano tali caratteristiche. L’ultima categoria è stata aggiunta sulla base della segnalazione di uno dei docenti sperimentatori. È stato riportato il caso di un alunno che ha strappato il foglio e non l’ha voluto consegnare, adducendo come motivo del disagio il fatto che il cartolaio “guadagna troppo poco”, il che “non può essere”. In questo caso si è ritenuto opportuno aggiungere una categoria apposita, accanto alla categoria “non svolge il compito”.

Tabella 3

Risultati relativi ai test A3, A4 e A6

	Testo A3 ("standard")	Testo A4 ("orettole")	Testo A6 ("przetqzvw")
Risolve correttamente	11%	19,5%	7,5%
Fornisce una risposta sbagliata perché confonde i termini tecnici <i>incasso</i> e <i>guadagno</i>	58,5%	53,0%	45,0%
Svolge calcoli a caso o inventa procedimenti fantasiosi che inducono in errore	28,0%	25,0%	41,0%
Non svolge il compito o risponde che non lo sa	2,5%	2,5%	6,5%

5.3. I dati delle risposte nelle interviste

Le risposte alle interviste sono state classificate secondo le seguenti categorie:

- Sostituisce l'oggetto designato dalla parola ignota con uno noto.
- Non fa riferimento alla parola sconosciuta durante l'intervista o afferma di non essersi chiesto che cosa siano le "orettole" o i "przetqzvw".
- Non risponde.
- Manifesta disagio per la parola sconosciuta.

Tali categorie sono state in parte stabilite sulla base di un'analisi a priori delle caratteristiche generali delle risposte attese, anche in riferimento ai risultati delle interviste condotte nella sperimentazione dei primi anni '90, ma sono poi state adattate o arricchite sulla base delle risposte effettivamente ottenute. Le tipologie di categorie di risposte attese erano quelle di concetto variabile e concetto costante della parola sconosciuta.

Il *concetto variabile* della parola sconosciuta si manifesta o tramite l'accettazione del termine ignoto come qualcosa di sconosciuto, ma attendibilmente presente nel contesto descritto dal testo del problema, oppure tramite il riconoscimento del fatto che per rispondere alla domanda non serve sapere di quali oggetti si tratta, poiché questo non influenza le operazioni da svolgere e il loro risultato. D'altra parte, il *concetto costante* della parola sconosciuta si manifesta attraverso la sostituzione del termine ignoto con uno noto.

In particolare si può dire che lo studente ha un *concetto variabile* della parola sconosciuta se:

- a) immagina che debba significare qualcosa nel contesto, ma non le attribuisce un significato particolare; in questi casi lo studente sostituisce la parola inesistente con un termine generico (per esempio "cosa",

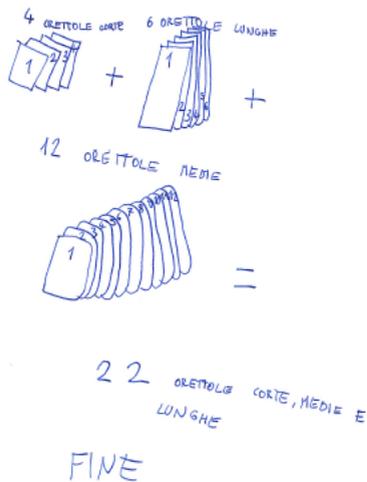
“qualcosa in una lingua straniera (...) un oggetto”; “una qualunque cosa”, “marca di qualche oggetto di cartoleria”), oppure fornisce una rappresentazione grafica generica degli oggetti designati dalla parola inesistente (forme generiche che si differenziano solo per la loro grandezza) (Figura 2);

- b) risolve o affronta il problema senza chiedersi che cosa significhi la parola sconosciuta; per esempio, lo studente dichiara nell'intervista che non è importante o non è stato necessario soffermarsi sul significato della parola sconosciuta, poiché per fornire la risposta è sufficiente focalizzarsi solo sui dati numerici oppure sulle parole che forniscono informazioni sull'operazione da eseguire. Esempi emersi in questo senso dalle interviste sono i seguenti: “Per risolverlo ho preso i numeri e ho fatto il calcolo”; “Ho fatto il per perché c'erano 60 cose e ha speso 2 euro”; “Ho letto i dati e ho fatto i calcoli”; “(...) le orettole dovevano essere qualcosa che usano in Italia, ma che non era importante. Ho fatto più perché si fa sempre così ed è un problema di terza”.

Si può invece dire che lo studente ha un *concetto costante* della parola sconosciuta se la sostituisce con una parola nota, come per esempio nei casi in cui sostituisce spontaneamente il termine “przxtqzvw” con la parola “banana” (Figura 3) o immagina che siano “rotoli di carta”, “cartoncini” o “pasta a forma di orecchiette”.

I dati delle interviste sono stati organizzati sempre sulla base delle due categorie: tipologia additiva (testi A2, A5) e tipologia mista (testi A4, A6). Notiamo che nel caso dei testi A1 e A3 non sono state condotte delle interviste; si tratta dei testi dei problemi “standard”, cioè quelli in cui le parole che designano gli oggetti sono ben noti agli alunni.

Nelle tabelle 4 e 5 sono stati messi a confronto: (a) i risultati dei due testi “additivi”, individuati con le rispettive parole sostitutive (“orettole” e “przxtqzvw”); (b) i risultati dei due testi “misti”, individuati con le rispettive parole sostitutive (“orettole” e “przxtqzvw”).



TESTO A5

Un cartolaio compra 4 przetqzyw corti, 6 przetqzyw lunghi e 12 przetqzyw medi. Quanti przetqzyw compra in tutto?

DATI:

4 = N° PRZETQZYW CORTI

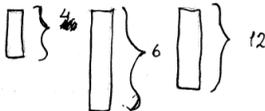
6 = N° PRZETQZYW LUNGI

12 = N° PRZETQZYW MEDI

RICHIESTA:

? = N° PRZETQZYW CHE HA COMPRATO

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA:



RAGIONAMENTO:

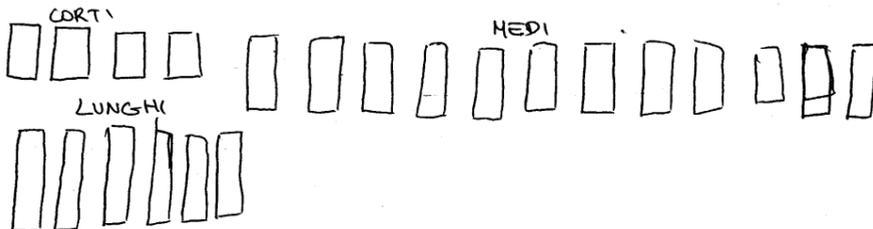
$$6 + 4 + 12 = 22$$

RISPOSTA:

IL CARTOLAIO HA COMPRATO IN TUTTO 22 PRZETQZYW

TESTO A5

Un cartolaio compra 4 przetqzyw corti, 6 przetqzyw lunghi e 12 przetqzyw medi. Quanti przetqzyw compra in tutto?



Il cartolaio ha 13 przetqzyw.

Figura 2. Esempi di concetto variabile: rappresentazioni grafiche generiche degli oggetti designati dalla parola sconosciuta.

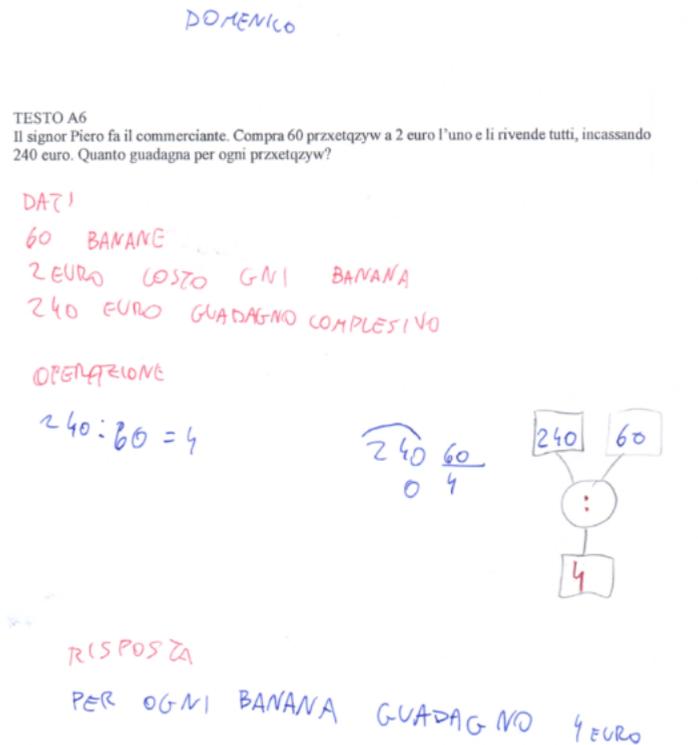


Figura 3. Esempio di *concetto costante*: protocollo in cui il termine sconosciuto è stato spontaneamente sostituito con la parola “banana”.

Tabella 4
 Risultati delle interviste relative ai testi additivi (A2 e A5)

	Testo A2 ("orettole")	Testo A5 ("przxetqzvw")
Sostituisce l'oggetto designato dalla parola ignota con uno noto oppure considera che non ci sia bisogno che tale parola sia nota	53,0%	66,0%
Non fa riferimento alla parola sconosciuta durante l'intervista o afferma di non essersi chiesto che cosa siano le "orettole" o gli "przxetqzvw"	47,0%	25,5%
Non risponde	0%	3,0%
Manifesta disagio per la parola sconosciuta	0%	5,5%

Tabella 5

Risultati delle interviste relative ai testi misti (A4 e A6)

	Testo A4 ("orettole")	Testo A6 ("przxtqzvw")
Sostituisce l'oggetto designato dalla parola ignota con uno noto oppure considera che non ci sia bisogno che tale parola sia nota	53,0%	73,5%
Non fa riferimento alla parola sconosciuta durante l'intervista o afferma di non essersi chiesto che cosa siano le "orettole" o gli "przxtqzvw"	39,0%	23,5%
Non risponde	2,5%	0%
Manifesta disagio per la parola sconosciuta	5,5%	3,0%

5.4. Commenti generali

Nel caso dei testi di tipologia additiva la sostituzione del termine "matita" con le parole inesistenti "orettole" e "przxtqzvw" non influisce sulla risoluzione dei quesiti. Infatti, in media le risposte corrette si attestano intorno al 90% per tutte e tre le tipologie.

Nel caso dei testi di tipologia mista, i risultati relativi al testo con la parola inesistente "przxtqzvw" sono di circa il 13% peggiori rispetto a quelli relativi al testo "normale", cioè in cui gli oggetti su cui verte il problema sono designati con il termine "matita"; le percentuali dei risultati del testo con la parola "orettole" sono più vicine a quelle del testo "normale" (la differenza in questo caso è di circa il 5%). Complessivamente sembra che si possa dire che la presenza del termine sconosciuto peggiori lievemente i risultati e in maniera maggiore nel caso in cui il termine sconosciuto è meno riconoscibile come appartenente al linguaggio condiviso: "orettole" può essere considerata come una parola sconosciuta ma esistente, mentre è più probabile che "przxtqzvw" non venga riconosciuta nemmeno come tale e venga rilevata come un'anomalia. Per esempio, un alunno commenta che ha pensato che la maestra si fosse "addormentata al computer" mentre scriveva il testo, premendo inavvertitamente sui tasti.

Ciò che influisce maggiormente sui risultati del quesito di tipologia mista è, come era stato supposto inizialmente, sulla base dei dati del 1997 (D'Amore, 1997), la mancata padronanza dei concetti di guadagno e incasso, piuttosto che la difficoltà legata all'uso della parola inesistente.

Solo nel caso della tipologia di testo mista è possibile notare una differenza tra il successo nella risoluzione del quesito nelle versioni in cui il termine "matita" è stato sostituito con "orettole" rispetto a quello in cui è stato sostituito con "przxtqzvw", con una maggiore percentuale di successo (per quanto limitata) nel caso della prima delle due. Nel caso della tipologia di

testo additiva questa differenza è addirittura invertita, con una percentuale lievemente maggiore per il testo con il termine “przetqvz”. Questo risultato potrebbe indurre a ritenere che sia la padronanza di uno schema risolutivo o la disponibilità di un invariante operatorio (Vergnaud, 1990) a rendere non necessaria la prefigurazione reale del contesto.

Dall'analisi delle interviste emerge che la percentuale di alunni che non si chiede che cosa voglia dire la parola sconosciuta è molto maggiore nel caso del testo con il termine “orettole” rispetto a quello con il termine “przetqvz”, mentre la tendenza a sostituire la parola ignota con una nota, oppure di immaginare che voglia dire qualcosa, è maggiore nel caso del testo con il termine “przetqvz” rispetto a quello con il termine “orettole”. Questi aspetti non sembrano dipendere dalla tipologia del testo (additiva o mista) e potrebbero essere dunque poco influenzabili dalla disponibilità o meno di uno schema risolutivo per il quesito proposto. Essi sembrano essere più di natura semantica.

Complessivamente si potrebbe ipotizzare che *la modalità* con la quale lo studente affronta situazioni in cui non dispone di un'immagine mentale che si riferisce a oggetti conosciuti sono diverse e possono dipendere dalla vicinanza sonora o scritta che la parola inesistente può avere rispetto ad altre note allo studente. Tuttavia sembra che, se lo studente dispone di uno schema risolutivo già acquisito, l'importanza di questi aspetti semantici – modelli del reale – è molto minore. Questo significa che lo studente è in grado di attivare autonomamente strategie per dare senso al testo, ma che ciò che determina principalmente la riuscita nel compito non è questa capacità di contestualizzazione linguistica, quanto la padronanza di schemi già acquisiti.

6. Confronto teorico fra le caratteristiche delle analisi compiute sulle ricerche dei primi anni '90 e del 2019-2020

Appare piuttosto evidente che i risultati empirici delle prove effettuate a distanza di oltre 20 anni non sono molto diversi fra loro. Quel che a noi interessa evidenziare grazie al presente lavoro di ricerca è la possibilità di mettere in campo, ora, diversi riferimenti teorici grazie ai quali dare un'ulteriore interpretazione di tali risultati.

6.1. Confronto teorico con gli strumenti derivanti dalla TO

Nel lavoro del 1997, si erano richiamati i seguenti costrutti teorici:

1. la posizione delineata da Paivio (1986) e descritta da Vecchio (1992, pp. 15–48) relativa alla supposta necessità da parte dei solutori di un problema (di matematica) di farsi un'immagine concreta-reale di quanto descritto a parole nel testo del problema, in tutti i suoi dettagli; il che sembrerebbe comportare la conoscenza di tutti i termini, di tutte le singole

parole che costituiscono tale testo;

2. la conferma di questa posizione da parte di Johnson-Laird (1983) basata sul concetto stesso di modello reale e da parte di Vergnaud (1985) basata sul suo concetto di schema e di campo concettuale [su questi temi, oltre al lavoro classico di Vergnaud degli anni '80, si vedano le riflessioni più recenti (Vergnaud, 2017)].

La nostra prova empirica mostrava che queste due posizioni non erano accettabili, dato che risultava evidente che lo studente che capisce il senso della proposta contenuta nel testo, può trasformarla in una successione di algoritmi ed eseguire i relativi calcoli che lo portano a rispondere alla domanda (poco importa che vi sia eventualmente un errore di calcolo, l'importante è che l'impostazione della o delle operazioni sia quella corretta). Quel che interessa è dunque trasformare il testo in procedura, anche senza la conoscenza semantica delle singole parole usate nel testo.

Si trattava allora, come si tratta oggi, di giustificare questa posizione; in modo specifico, cercare una spiegazione teorica, basata sulle teorie di didattica della matematica allora disponibili, di questa posizione, per dare risposta alle seguenti domande:

Perché lo studente riesce a risolvere ugualmente il problema? Che cosa significa possedere-capire il senso della proposta? Perché la non comprensione di un termine del testo non blocca la risoluzione del problema?

Come abbiamo già detto più volte, la teoria dominante in didattica della matematica alla fine del XX secolo era senza dubbio la TSD e a quella noi ci rifacciamo per spiegare il comportamento dello studente e per dare così risposta alle domande di ricerca:

1. una clausola del contratto didattico che potremmo inserire nel contesto contrattuale più generale “comportamento dell'insegnante” e “fiducia nell'insegnante” [per la quale possiamo sia citare fonti classiche originali (Brousseau, 1980, 1986) sia fonti più recenti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020)] e che possiamo descrivere come segue: l'insegnante non può certo inserire parole senza senso o inesistenti nel testo di un problema di matematica (e comunque: senza avvisare lo studente); lo scopo del problema è di spingere lo studente a lavorare in matematica, non a interpretare parole; se l'insegnante decide di complicare il problema, lo farà con mezzi specifici della matematica, e non esterni a essa: numeri più grandi o con la virgola, problemi con più operazioni, o “difficili” come la divisione e non “facili” come l'addizione;
2. una clausola del contatto didattico che potremmo definire in generale “attese dello studente nei riguardi dell'insegnante” (stesse indicazioni bibliografiche): secondo l'allievo, l'insegnante si aspetta che lo studente risolva il problema e fornisca la risposta corretta descrivendo il procedimento risolutivo, senza fare dell'altro (come potrebbe essere: interpretare o spiegare le singole parole del testo o i singoli dati).

Come già evidenziato nel paragrafo 2, scopo della ricerca, una volta verificato, come si supponeva, che i risultati sarebbero più o meno stati gli stessi, è quello dunque di mettere in campo teorie diverse che contribuiscano a dare spiegazioni diverse del fenomeno, così contrario alle attese diffuse negli anni '80.

Facciamo dunque ora riferimento alla TO per dare risposte alle stesse domande evidenziate poco sopra. Osserviamo innanzitutto che le interpretazioni proposte nella ricerca dei primi anni '90 non sono da rigettare a priori, in quanto si basano su teorie solide e ben documentate in didattica della matematica. Ricordiamo ancora una volta che la nostra intenzione è da un lato di riesaminare i costrutti teorici usati all'epoca sulla base dell'evoluzione della ricerca in didattica della matematica avvenuta negli ultimi vent'anni. In particolare, vogliamo mostrare alcuni nuovi elementi che possono essere posti a fondamento di tali teorie e che vanno a completare la loro portata esplicativa e interpretativa. Dall'altro, vogliamo proporre una lettura possibilmente più ricca ed esauriente del comportamento degli studenti, esposti a problemi con termini linguistici inesistenti.

Ripartiamo dal filone sociologico e antropologico di Berger e Luckmann (1997) illustrato nel paragrafo 2, per inquadrare il ruolo della dualità sapere-significato nello sviluppo ontogenetico dell'individuo. Il perno della nostra argomentazione si sviluppa attorno alla necessità dell'essere umano, nel nostro caso l'allievo, di oggettivarsi in una molteplicità di mondi, creando un ordine culturale e simbolico che fornisca la stabilità e il significato che gli sono intrinsecamente mancanti. Queste oggettivazioni, come abbiamo visto, si realizzano socialmente attraverso processi di istituzionalizzazione e tipizzazione di azioni in schemi e routines che modellano la nostra esperienza umana a livello cognitivo. La TO offre un'opportuna caratterizzazione di questi processi, per quanto riguarda l'apprendimento della matematica, in termini di attività riflessiva mediata che mette in campo tipizzazioni di azioni in termini di schemi, routines, discorsività matematica ecc. In questa prospettiva, il dominio cognitivo dell'alunno si configura come una forma senziante, costituita culturalmente e storicamente, di rispondere creativamente, agire, sentire, immaginare, trasformare e dare significato al mondo (Radford, 2014a). Abbiamo visto nel paragrafo 2 che questi processi di significazione culturale, nell'ambito dell'insegnamento-apprendimento della matematica, sono definiti dalla TO come *processi di oggettivazione* che si dispiegano grazie all'impiego sincronico di un ricco arsenale di risorse semiotico-culturali, i cosiddetti *mezzi semiotici di oggettivazione*. Nei processi di oggettivazione, il significato è un costrutto duale nel quale si incontrano aspetti individuali e culturali.

Sulla base di questa cornice teorica andiamo ora ad ampliare la portata interpretativa dei costrutti a cui si era fatto riferimento nella ricerca dei primi anni '90.

6.1.1. Immagini, modelli e schemi

La nozione di immagine-modello mentale fornisce uno strumento teorico per inquadrare efficacemente la concettualizzazione. La ricerca in didattica della matematica (D'Amore, 1999) ha mostrato quanto possa essere potente questo strumento per individuare il difficile percorso cognitivo che lo studente deve seguire per raggiungere la corretta concettualizzazione in matematica e permette di caratterizzare gli “incidenti di percorso” in termini di conflitti cognitivi, misconcezioni e ostacoli. La definizione di concetto introdotta da Vergnaud (1990) arricchisce la nozione di immagine-modello ampliandola nel senso della terna composta dalle situazioni, gli invarianti operatori degli schemi (concetti-in-atto e teoremi-in-atto) e i sistemi di rappresentazione del concetto.

Questa prospettiva sembra inadatta a interpretare il comportamento degli allievi di fronte a problemi che contengono termini linguistici inesistenti, in quanto, a nostro avviso, l'immagine, il modello e gli invarianti operatori sono come la punta dell'iceberg di ciò che si cerca di delineare come sapere, concettualizzazione e significato in matematica. L'immagine mentale e il concetto alla Vergnaud possono essere ricondotti essenzialmente a una relazione tra un oggetto e una sua immagine mentale rinforzata dall'uso di opportune rappresentazioni semiotiche. Inoltre, l'intrinseca inaccessibilità degli oggetti matematici, evidenziata nel paragrafo 2, non permette di scindere l'immagine mentale dalle rappresentazioni semiotiche che si consolidano proprio come immagini mentali a seguito dell'attivazione delle trasformazioni di trattamento e conversione che caratterizza la cognizione in matematica.

Questa accezione di immagine mentale si inserisce nel filone delle teorie realiste, in quanto presuppone l'esistenza di entità reali o ideali che esistono indipendentemente dal dominio percettivo e cognitivo dell'individuo. Il comportamento degli allievi nei confronti dei termini linguistici inesistenti “orettole” e “przxtqzyw” sembrano mettere in crisi questa accezione di immagine, di modello e di schema. Questo dato sembra invece confermare il bisogno dell'essere umano, evidenziato nel paragrafo 2, di attivare un'apertura dialettica nei confronti del mondo sulla base della quale esso è al contempo prodotto dall'attività umana e motore della produzione stessa.

Quindi, di fronte a un termine linguistico sconosciuto, lo studente è intrinsecamente portato ad attivare i processi di oggettivazione che gli forniscono il significato, in questa situazione, intrinsecamente mancante. Come abbiamo visto nel paragrafo 2, lo studente innesca una *praxis cogitans* che gli permette di elaborare una *riflessione* intesa come relazione attiva con la sua realtà storico-culturale. Tale riflessione culturale, nel contesto di un problema con termini linguistici sconosciuti, permette all'allievo di tipizzare la sua *praxis cogitans* in immagini, modelli e schemi, connotati culturalmente, che orientano le sue azioni future, nel nostro caso specifico, la risoluzione del problema. Le sue azioni e le sue percezioni si sviluppano nell'alveo di

strutture di aspettativa che assicurano uno sfondo di significato personale e culturale relativamente alla risoluzione del problema. Possono verificarsi situazioni in cui i due significati confliggono e la soluzione proposta dall'allievo non sarà corretta.

Se consideriamo l'immagine mentale, con il suo corredo di rappresentazioni semiotiche, come "isomorfa" a una situazione reale (concreta o ideale) a priori, è ragionevole pensare che l'assenza di una immagine mentale sia di ostacolo alla cognizione e alla attivazione di strutture concettuali nella risoluzione di problemi. Questa prospettiva soffre di una visione dualistica della cognizione che considera la dimensione interna, soggettiva, concettuale e ideale, separata da quella esterna relativa al mondo oggettivo, materiale e della nostra esperienza senso-motoria. La TO intende ristabilire una unità dialettica tra aspetti interni ed esterni in un "intreccio tra soggetto e oggetto, mente e mondo, che acquisisce una specifica dimensione in virtù della capacità degli esseri umani, evolutasi storicamente, di interagire con il mondo e con gli altri individui della specie" (Radford, 2014a, p. 352). La possibilità di questa interazione dialettica, attraverso la quale gli individui e il mondo si co-producono, consente agli alunni di attivare processi di oggettivazione mediati da opportuni mezzi semiotici che possono condurre alla risoluzione del problema.

6.1.2. *Le clausole del contratto didattico*

Nei processi di oggettivazione non sempre si realizza una convergenza tra il significato personale dell'alunno e quello culturale o atteso dall'insegnante. L'interazione sociale tra insegnanti e allievi e la natura delle pratiche mediate dai mezzi semiotici di oggettivazione non realizzano necessariamente quel movimento per incontrare l'oggetto appartenente al Sapere matematico in senso culturale. Le pratiche matematiche possono tipizzarsi in strutture di aspettativa legate a interpretazioni e convinzioni sulla matematica, sull'insegnamento e sull'apprendimento, sul comportamento degli individui, piuttosto che su un obiettivo emotivamente condiviso tra insegnante e allievi di produrre conoscenza matematica, che nella TO viene definito come *joint labour* (Radford, 2014b, 2016, 2018; D'Amore, 2015, 2017a, b, 2018). L'allievo si trova così alienato sia dal significato storico-culturale, che costituisce il carattere più profondo del sapere matematico, sia dagli altri individui che partecipano a questa fase-attività.

Le clausole del contratto descritte sopra e riprese dalla analisi condotta nell'articolo del 1997 esprimono il malessere cognitivo e affettivo-relazionale derivante da un contesto d'aula che può risultare alienante e nel quale i processi di insegnamento e apprendimento non si realizzano come *joint labour*.

6.1.3. La risoluzione di un problema come processo di oggettivazione-soggettivazione

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto una nozione centrale della TO, quella di *joint labour* come insieme delle pratiche socialmente condivise nello spazio culturale dell'aula di matematica. Nel *joint labour* si realizza l'attività che conduce dal sapere come possibilità in potenza a una sua attualizzazione determinata (oggettivazione). Al contempo, insegnanti e allievi co-producono, nel *joint labour*, la propria individualità (soggettivazione). Nella TO gioca un ruolo prioritario il modo d'essere della conoscenza (oggettivazione) e il modo d'essere degli individui (soggettivazione). Oggettivazione e soggettivazione non sono categorie statiche, ma il loro modo d'essere è inscindibile dal loro divenire nel *joint labour* che li attualizza (Radford, 2014b). Nel *joint labour* si supera la dicotomia insegnante-allievo, in quanto l'insegnante e i suoi allievi sono fusi nel loro obiettivo comune di produrre conoscenza e co-produrre loro stessi, trasformando il lavoro in aula da esperienza alienante a esperienza di compiutezza sociale, estetica, intellettuale.

Nel *joint labour* si realizzano infatti due processi dialetticamente intrecciati, l'oggettivazione della conoscenza e la soggettivazione, vale a dire, la produzione delle individualità, sia dell'allievo che dell'insegnante. In questo paragrafo vogliamo approfondire la nozione di soggettivazione e usarla come lente interpretativa del comportamento degli allievi di fronte allo specifico che qui ci interessa, cioè di fronte a problemi che contengono parole inesistenti.

Radford (in press) propone una concezione di educazione e apprendimento secondo la quale il soggetto non è considerato come un elemento passivo plasmato dal suo ambiente circostante, né come un'entità che nella sua interazione con l'ambiente produce sé stesso autonomamente. La soggettivazione è una coproduzione nella quale si incontrano l'interazione sociale, l'agire e uno sfondo storico-culturale di riferimento. Radford (in press) concepisce il soggetto come un'entità in divenire che nell'agire si posiziona nel contesto sociale, secondo le potenzialità e i vincoli della sua cultura di appartenenza. Nei termini della dialettica materialistica che informa la TO, gli individui producono la loro realtà che a sua volta li produce (D'Amore, 2015).

Il perno della produzione del soggetto è lo sfondo storico-culturale che inevitabilmente definisce il modo d'essere degli individui. Tuttavia, la relazione del soggetto con il suo ambiente storico-culturale non è passiva ma *riflessiva*, nel senso che egli reagisce con l'azione a tale ambiente (Radford, in press).

Un altro aspetto che caratterizza la soggettivazione è la dialettica tra essere e divenire. Per esigenze esplicative distinguiamo questi due aspetti anche se nel processo di soggettivazione essi sono inseparabili. L'*essere* è la capacità generativa della cultura che definisce il modo in cui ci si concepisce e il modo in cui siamo concepiti. Ma l'*essere* dell'individuo si materializza e si istanzia

nelle attualizzazioni che scaturiscono dalla pratica sociale culturalmente determinata, il *divenire*. (Radford, in press). Quindi, i processi di soggettivazione possono essere definiti come “processi legati all’agire nei quali, co-producendo sé stessi sullo sfondo della cultura e della storia, insegnanti e studenti (e gli individui in generale) diventano presenze” (Radford, in press).

La risoluzione dei problemi proposti agli allievi della nostra sperimentazione è possibile grazie all’implementazione di strategie risolutive che essi devono possedere e riconoscere. Tali strategie risolutive, d’altra parte, non derivano necessariamente da un *joint labour*. Le produzioni (scritte e orali) dei partecipanti hanno infatti fatto emergere strategie risolutive che sono state elaborate, gestite e applicate autonomamente dai singoli allievi, come previsto dal disegno di ricerca. Non evidenziano alcun *joint labour*, alcuna co-produzione degli allievi partecipanti con i loro insegnanti, soprattutto nelle interpretazioni fornite dagli allievi delle parole “orettole” e “przxtqzvw”. Le produzioni degli allievi possono dunque essere considerate come attualizzazioni di un sapere che non deriva necessariamente da un *joint labour* con l’insegnante. Tali produzioni potrebbero infatti essere il risultato di situazioni didattiche che privilegiano relazioni insegnante-allievo fortemente asimmetriche o dicotomiche, come quelle nelle quali l’insegnante fa lezione, spiega, pone domande e gli allievi (almeno in parte) ascoltano, interpretano, rispondono o pongono domande, studiano, svolgono i compiti ... in modo per lo più autonomo. In generale, non tutti gli allievi co-partecipano in modo attivo o interagiscono tra loro e con l’insegnante nel processo di insegnamento-apprendimento, per vari motivi, legati al loro carattere o al loro modo personale di concepire l’insegnamento-apprendimento e, più in generale, la scuola.

6.2. Confronto teorico con l’approccio semio-cognitivo

Passiamo ora all’analisi dei dati con la seconda componente del nostro quadro teorico, cioè con l’approccio semio-cognitivo.

I dati raccolti evidenziano l’uso di rappresentazioni semiotiche nel registro della lingua naturale e nel registro aritmetico mescolate a rappresentazioni ausiliarie di transizione (disegni, rappresentazioni semiotiche di tipo iconico di oggetti concreti, diagrammi...) per la risoluzione dei problemi proposti (vedi Figure 2 e 3).

In particolare, gli allievi considerano le parole “orettole” e “przxtqzyw” come rappresentazioni di oggetti non matematici, anche se non ben identificati, all’interno di un registro discorsivo multifunzionale non ben riconosciuto, confuso con quello della lingua naturale, o di una lingua diversa da quella naturale, con funzioni linguistiche di tipo referenziale. Il mancato riconoscimento di tali segni (sequenze di lettere) come rappresentazioni di oggetti specifici è risultato in ogni caso poco rilevante per la risoluzione dei

problemi in esame. Riportiamo qui di seguito alcuni esempi di risposte riguardanti la parola “przetqzyw” fornite dagli allievi durante le interviste:

Ho capito che non dovevo guardare la parola che non capivo ma solo il resto.

Non sapevo cosa fosse ma non importava, dovevo solo fare la somma.

Parola strana, ma ho fatto finta di nulla.

Prima ho ragionato e ho pensato che qua “przetqzyw” doveva essere un oggetto a piacere.

Ho pensato che era divertente e che la parola strana era inventata ma che non serviva per la soluzione. Ho immaginato fosse la marca di qualche oggetto da cartoleria. Ho fatto il calcolo perché era facile e il ragionamento era facile.

Qualche altro esempio, ma riguardante la parola “orettola”:

Ho pensato che c’era una parola strana ma visto che è un problema di matematica non devo sapere il significato.

La prima cosa a cui ho pensato è che non sapevo cosa sono le orettole. Poi sono riuscita comunque a fare il problema perché non serviva sapere il significato della parola.

Appena letto non l’ho capito, poi l’ho riletto un paio di volte e l’ho capito. Però certe cose non le ho capite, come orettole non so cosa sono. Per risolverlo ho preso i numeri e ho fatto il calcolo.

Ho pensato che la parola strana poteva significare ‘pezzi di carta’ in un’altra lingua. Non era importante per risolvere il problema.

Ho pensato di essere il venditore e di comprare qualcosa, queste orettole. Poi dovevo rivenderle e allora ho pensato quanto guadagno? E ho fatto il calcolo e la prova per vedere se era giusto il risultato. Secondo me le orettole sono un cibo, ma non importa tanto per rispondere al problema non serve sapere cosa sono, perché è una qualunque cosa, e tu devi solo sapere quanto ha guadagnato con quella cosa.

Subito un po’ emozionata, ma poi ho visto che era facile.

L’operazione intenzionale discorsiva di designazione che alcuni allievi (anche se non tutti) hanno effettuato in modo spontaneo, senza alcuna richiesta esplicita, ha permesso loro di focalizzare l’attenzione sulle caratteristiche di oggetti noti, specifici, concreti che diano senso al problema o ne facilitino la risoluzione. Come quando in geometria per risolvere un problema o per dimostrare un teorema relativo a un triangolo generico si disegna un triangolo specifico, su cui focalizzare l’attenzione. La differenza è che gli oggetti veicolati dalle due parole in questione non rinviano a oggetti matematici (il cui acquisto sarebbe anche assai poco plausibile o altamente improbabile), ma a oggetti concreti rappresentati in un registro discorsivo multifunzionale. Un altro esempio:

Stavo leggendo e poi alla terza volta mi sono accorto che lui comprava delle cose e io dovevo dire quante ne avevo acquistate. Quindi bastava sommare tutto, tanto erano tutte cose uguali, ho controllato e sono sempre przxetqzyw solo di lunghezze diverse. Non so cosa compro, ma cose che possono essere lunghe, corte e medie. Tipo delle buste?

È risultata invece matematicamente importante, anzi cruciale, la conoscenza dei termini “incasso” e “guadagno”, termini che molti allievi hanno confuso tra loro (par. 5). Significativa la conferma di due insegnanti “In classe non si ricordavano più la differenza tra guadagno e incasso e sono stati usati come sinonimi”. Poi aggiungono:

Eravamo curiose di vedere cosa poteva accadere se i testi venivano presentati dall'insegnante di italiano, allora ho lasciato le copie e il giorno successivo l'insegnante di italiano ha proposto i testi agli alunni dell'altra sezione. Pensavamo che avrebbero fatto più attenzione al significato delle parole, ma i risultati sono stati molto simili.

La natura multifunzionale del registro discorsivo al quale dovrebbero in qualche modo appartenere, almeno per gli allievi, le parole “orettole” e “przxetqzyw”, in particolare il fatto che le due sequenze di lettere, come numerosi segni usati in matematica, non veicolino di per sé oggetti specifici, ha permesso loro di superare l'*impasse*: il mancato riconoscimento di rappresentazioni di oggetti specifici è stato dunque poco rilevante (anche dal punto di vista affettivo o psichico) per la risoluzione dei problemi, come sopra evidenziato.

Nel processo di risoluzione, le “rappresentazioni grafiche generiche” degli oggetti designati dalle parole sconosciute (alcuni esempi sono riportati in Figura 2) costituiscono delle rappresentazioni ausiliarie di transizione (Duval, 2017), dal registro della lingua naturale al registro aritmetico. La scelta di tali rappresentazioni (più o meno efficaci, necessarie o utili dal punto di vista matematico) risulta spesso legata ad abitudini o a tecniche risolutive acquisite a scuola, stimolate o attese dell'insegnante al fine di ancorare le nozioni matematiche a “situazioni problematiche concrete che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo” (Ministero della Pubblica Istruzione, 1985). L'uso di rappresentazioni ausiliarie (disegni, rappresentazioni semiotiche di tipo iconico di oggetti concreti, diagrammi...) per contestualizzare il problema matematico in modo da facilitare la conversione di rappresentazioni dal registro della lingua naturale a quello aritmetico si è rivelata importante solo in pochi casi, soprattutto per la creazione di un “contesto emozionale positivo” con “caratteristiche di stabilità, sia cognitiva sia relazionale” (D'Amore, 2014, p. 64).

6.3. Confronto tra teorie

Il confronto tra le due ricerche, quella dei primi anni '90 e quella oggetto del

presente articolo, ha inevitabilmente comportato anche un confronto tra teorie in didattica della matematica che, tra l'altro, sono nate in periodi diversi. Il problema del confronto tra teorie studiato e analizzato in profondità soprattutto nell'ultimo decennio è diventato caratteristico della didattica della matematica in quanto la complessità del suo oggetto di studio, l'insegnamento-apprendimento della matematica, comporta un proliferare di teorie e quadri teorici. I termini della questione ci sembrano chiaramente espressi in D'Amore e Godino (2006):

Nell'attuale panorama della didattica della matematica osserviamo un certo "autismo" teorico (racchiuso in sé stesso) e una disarticolazione concettuale e metodologica. Questo problema si osserva non solo tra paradigmi e scuole di pensiero lontane (pragmatismo, realismo, costruttivismo, cognitivismo ecc.), ma perfino dentro le teorie emergenti di livello intermedio che condividono uno stesso paradigma epistemologico di base. Per poter fare questi paragoni e articolazioni è necessario costruire un sistema di riferimento più globale che permetta di situare ciascuna teoria nel panorama complessivo dell'educazione matematica. È necessario tener conto simultaneamente delle distinte dimensioni implicate nei problemi di insegnamento e apprendimento della matematica (dimensione epistemica, cognitiva, istituzionale, politica ecc.) e i diversi livelli di analisi. (D'Amore & Godino, 2006, p. 27)

Non intendiamo trattare in generale la tematica del confronto e della coordinazione di teorie in didattica della matematica, per il cui approfondimento rimandiamo il lettore a Radford (2017). Ci interessa accennare alla questione del confronto, che è stato alla base di una parte delle analisi che abbiamo condotto nel presente lavoro.

Radford (2008b) considera lo sviluppo di una teoria all'interno di uno spazio socio-culturale che Lotman (1990) chiama *semiosfera*, uno spazio che favorisce l'integrazione e il dialogo tra differenti identità culturali. Nella prospettiva di confrontare e coordinare diverse prospettive teoriche, la semiosfera armonizza due dimensioni: l'*integrazione* dei suoi enti nella prospettiva di operare una sintesi e la *differenziazione* che favorisce l'*identità* e la conoscenza di sé. Come già detto in precedenza, Radford (2008b) considera come teoria T la terna T(P, M, D) che è una struttura dinamica costituita da:

- 1) un *sistema di principi* che caratterizzano la teoria da un punto di vista epistemologico;
- 2) una *metodologia* che informa le realizzazioni sperimentali della teoria;
- 3) un *sistema di domande di ricerca* che assumono significato nell'ambito del sistema di principi.

Il sistema di principi definisce la natura della teoria. Radford (2008b) sottolinea come i principi non si configurino semplicemente come una giustapposizione di affermazioni, ma sono organizzati in una struttura gerarchizzata. Per comprendere la natura di una teoria e, dunque, anche per

connettere e confrontare teorie, non basta riconoscerne i principi, ma occorre anche analizzare la loro posizione gerarchica all'interno del sistema a cui appartengono. Uno o più principi possono essere comuni a più teorie, ma questo non significa che tali teorie siano tra loro equivalenti se i principi hanno posizioni e relazioni differenti nel sistema gerarchico. Il sistema dei principi è particolarmente efficace nel delineare i confini di una teoria (Radford, 2008b). Per *confine* di una teoria si deve intendere una soglia oltre la quale la teoria perde la sua identità e la sua coerenza interna. Il confine stabilisce il limite del discorso della teoria oltre il quale la teoria entra in contraddizione con il suo sistema di principi e dunque risulta inapplicabile.

Il confronto tra la ricerca dei primi anni '90 e quella odierna ha mostrato come le diverse teorie hanno un raggio di azione interpretativa ed esplicativa determinato dalla struttura dei rispettivi sistemi di principi e come principi comuni a teorie differenti possono assumere funzioni diverse in relazione al loro posizionamento all'interno del sistema di principi. La forza esplicativa e interpretativa della didattica della matematica, dunque, può svilupparsi nella sintonia tra la dimensione dell'identità e dell'integrazione all'interno della semiosfera.

Nel presente lavoro abbiamo mostrato che, nelle integrazioni all'interno della semiosfera, la TO non perde la propria identità, anche se viene applicata a contesti che vanno al di là dei suoi confini, purché l'approccio nell'interpretazione dei suoi costrutti teorici nel dialogo tra teorie sia di tipo ermeneutico piuttosto che strutturale (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020b).

7. Conclusioni

Una nuova teoria in una data scienza appare all'orizzonte o emerge quando certi aspetti di un dato fenomeno che sono stati precedentemente trascurati o semplicemente incorporati ad altri in un processo più ampio d'indagine, diventano oggetti specifici di uno studio scientifico specializzato, condotto mediante particolari strumenti, diversi dai precedenti o più raffinati, ma condivisi da una data comunità di ricercatori. Questo è il caso, per esempio, della teoria dell'oggettivazione di Radford e dell'approccio semio-cognitivo di Duval, in relazione alla teoria delle situazioni didattiche di Brousseau. Da qui l'idea di riesaminare criticamente (a distanza di anni), con strumenti più moderni, lavori di ricerca precedenti, in particolare la ricerca, iniziata nei primi anni '90, descritta in dettaglio in D'Amore (1997). Tale ricerca è stata riproposta, con modalità simili, tra la fine del 2019 e i primi mesi del 2020. Si configura tuttavia come una nuova ricerca, in quanto basata su nuove domande di ricerca, oltre a quelle specifiche degli anni '90, per tenere conto del nuovo contesto culturale e dei nuovi strumenti di analisi elaborati dalla ricerca internazionale in didattica della matematica.

Gli scopi della nostra ricerca erano infatti, in estrema sintesi, i seguenti: (1) stabilire se i risultati empirici ottenuti nella prima ricerca risultano confermati o attendibili; (2) verificare se strumenti più moderni conducono a risultati di ricerca diversi; (3) mostrare come un ampio quadro teorico, molto eterogeneo, sia in grado di fornire interpretazioni o spiegazioni del fenomeno in esame; (4) porre in relazione gli strumenti teorici disponibili all'epoca della ricerca condotta negli anni '90 (la teoria delle situazioni didattiche di Brousseau) e gli strumenti teorici forniti da altre teorie o approcci di ricerca successivi (in particolare, la teoria dell'oggettivazione di Radford e l'approccio semio-cognitivo di Duval).

Qui di seguito si forniscono le risposte alle domande di ricerca (che riportiamo di nuovo per comodità del lettore prima di ogni risposta), sulla base dell'analisi qualitativa e quantitativa dei dati raccolti nel corso della ricerca.

D1. Domande della ricerca degli anni '90:

Supponiamo che un giovane allievo di scuola primaria, leggendo il testo di un problema, incontri una parola chiave il cui significato gli appare sconosciuto; quale sarà la sua reazione? Risolverà ugualmente il problema o si bloccherà per il disagio provocato dal non comprendere una parola chiave del testo? La scelta dell'allievo dipende dal ruolo che ha la parola per la risoluzione del problema? O dalla posizione occupata dalla parola sconosciuta nel testo? Quella parola, necessaria per la costruzione di un modello descrittivo "reale" della situazione-problema proposta nel testo, serve davvero per la sua risoluzione?

R1. La presenza di un termine sconosciuto (non matematicamente rilevante) in un problema di matematica ostacola leggermente la risoluzione del problema (rispetto al caso in cui il termine in questione sia conosciuto) e in maniera maggiore nel caso in cui il termine sconosciuto sia considerato come inesistente. In particolare, nella maggior parte dei casi, la parola "orettole" è considerata come una parola sconosciuta ma esistente, mentre "przxtqzvw" non viene considerata come una parola esistente. Inoltre, i dati raccolti hanno evidenziato la tendenza a sostituire la parola sconosciuta con una conosciuta, oppure a immaginare che la parola sconosciuta voglia dire qualcosa, soprattutto quando la parola in questione è considerata come inesistente ("przxtqzvw").

Il modo in cui lo studente affronta una situazione-problema di cui non si è fatto o non dispone di un modello descrittivo "reale", a causa della presenza di una parola chiave il cui significato gli appare sconosciuto, dipende dalla padronanza di schemi risolutivi della situazione-problema o dalla capacità dello studente di sostituire (per assonanza, per necessità o per abitudine) la parola sconosciuta con un'altra che permetta la costruzione di un modello descrittivo "reale" o "familiare" in grado di facilitarne la risoluzione.

D'altra parte, per lo studente che mostra una certa padronanza di schemi risolutivi della situazione-problema, l'importanza degli aspetti semantici delle parole non matematicamente rilevanti risulta minore, come pure l'esigenza di

un modello descrittivo “reale” della situazione-problema proposta nel testo. In altre parole, lo studente è in grado di attivare autonomamente strategie per dare senso al testo, ma ciò che determina principalmente la riuscita nel compito non è tanto la sua capacità di rappresentare nel registro della lingua naturale la situazione-problema proposta nel testo, quanto piuttosto la sua capacità di convertire nel registro aritmetico le parole matematicamente rilevanti (in particolare le parole “incasso” e “guadagno”) e trattare le rappresentazioni in tale registro, capacità che deriva anche dalla padronanza di schemi acquisiti.

D2. Domande che mirano a verificare la validità dei risultati sperimentali del 1997:

Le differenze tra la percentuale di studenti che risolve comunque il compito è simile nei tre casi, cioè sia che nel testo una data parola chiave sia stata sostituita (da una non esistente, ma con parvenze di una parola esistente o da una palesemente non esistente) o che sia stata lasciata inalterata?

Le categorie in cui furono classificate le reazioni degli studenti nel 1997 si confermano e se ne aggiungono delle nuove? Se sì, quali?

R2. La percentuale di studenti che risolvono correttamente il problema è simile nei tre casi (testo con parola nota, testo con parola non esistente ma con parvenza di parola esistente, testo con parola palesemente non esistente) se il problema è di tipologia additiva. Se il problema è di tipologia mista la percentuale di studenti che risolvono correttamente il problema risulta leggermente inferiore se il testo contiene la parola palesemente inesistente (rispetto agli altri due casi: testo con parola nota, testo con parola non esistente ma con parvenza di parola esistente).

Le categorie secondo le quali sono state classificate le risposte nel 1997 risultano in parte confermate (per esempio: “Risolve correttamente”, “Non svolge il compito”), in parte arricchite di dettagli (per esempio: “Fornisce una risposta sbagliata perché confonde i termini tecnici *incasso* e *guadagno*”, “Svolge calcoli a caso o inventa procedimenti che inducono in errore”, “Sostituisce l’oggetto designato dalla parola ignota con uno noto”) e in parte completamente nuove (“Sbaglia il calcolo ma l’operazione impostata è corretta”, “Manifesta disagio che pregiudica lo svolgimento o la consegna del compito”).

D3. Domande relative a una possibile “attualizzazione” dei risultati della ricerca degli anni ’90, non solo attraverso la verifica dei dati sperimentali, ma anche attraverso la loro analisi con un quadro teorico differente:

In che senso è possibile ottenere risultati nuovi o “attualizzare” i risultati di una ricerca non solo attraverso la verifica dei risultati sperimentali, ma anche attraverso il ricorso a un quadro teorico diverso rispetto a quello su cui essa si è basata all’epoca, senza modificare la metodologia di ricerca?

R3. È possibile ottenere risultati nuovi o “attualizzare” i risultati di una ricerca mediante strumenti di analisi diversi o più raffinati se tali strumenti derivano da approcci di ricerca o da teorie i cui principi risultano almeno parzialmente comparabili e parzialmente compatibili con quelli sui quali si basa la ricerca in questione. In particolare, in questa ricerca l’approccio semio-cognitivo ha permesso di interpretare i dati raccolti da un punto di vista cognitivo e semiotico allo stesso tempo (in termini di rappresentazioni semiotiche e di loro trasformazioni), accanto al punto di vista puramente cognitivo (focalizzato sul ruolo delle immagini, dei modelli, degli schemi, degli ostacoli, del contratto didattico, oltre che su altri aspetti di natura cognitiva). L’approccio semio-cognitivo, in relazione alla TSD, risulta tuttavia parzialmente comparabile (in quanto condivide con la TSD solo alcuni aspetti di natura cognitiva) e parzialmente compatibile (in quanto nelle analisi condotte con gli strumenti della TSD gli aspetti semiotici rimangono impliciti o risultano trascurabili rispetto a quelli puramente cognitivi).

La TO di Radford, come già evidenziato, risulta anch’essa parzialmente comparabile e parzialmente compatibile con la TSD, ma in questa ricerca non è stato possibile analizzare i dati raccolti con gli strumenti specifici della TO, in quanto le produzioni individuali dei partecipanti alla ricerca non potevano essere considerate come risultati di processi di oggettivazione-soggettivazione. In altre parole, i principi della TO non erano applicabili al contesto della nostra ricerca. D’altra parte, la TO ha permesso di ricondurre alcuni aspetti, come il malessere cognitivo e affettivo-relazionale manifestato da alcuni studenti durante la sperimentazione, a un contesto d’aula nel quale, verosimilmente, il processo di insegnamento-apprendimento risulta svincolato dal *joint labour*.

D4. Domande di metariflessione sul contributo al dibattito sulle teorie in didattica della matematica del presente lavoro:

In che senso la presente attualizzazione dei risultati di una ricerca del passato attraverso la reinterpretazione degli strumenti teorici dell’epoca in riferimento a strumenti teorici attuali, può fornire un contributo al dibattito sulle teorie in didattica della matematica, in particolare in riferimento al rapporto tra la TO e la TSD?

R4. L’attualizzazione dei risultati di una ricerca del passato attraverso la reinterpretazione degli strumenti teorici disponibili all’epoca della ricerca, alla luce degli strumenti teorici attuali, fornisce un importante contributo al dibattito sul confronto tra teorie, in particolare alla comprensione del ruolo delle diverse teorie in didattica della matematica e della possibilità di un dialogo in chiave ermeneutica, un confronto non epistemologico tra le teorie, in assenza di un insieme di principi o concetti comuni (Bagni, 2009), ai fini di una loro coordinazione o combinazione (Prediger, Bikner-Ahsbabs, & Arzarello, 2008) che permetta un’analisi più ricca, profonda e articolata delle

differenti dimensioni (cognitiva, semiotica, socioculturale,...) dei fenomeni di insegnamento-apprendimento della matematica.

In particolare, in riferimento al rapporto tra la TO e la TSD, la ricerca ha evidenziato un limitato raggio d'azione della TO ai contesti di ricerca nei quali l'insieme delle pratiche socialmente condivise alla base dei processi dialetticamente intrecciati di oggettivazione-soggettivazione assumono un ruolo marginale o secondario rispetto ai prodotti di tali pratiche o dei processi di adattamento cognitivo individuale dello studente a una situazione problematica.

D'altra parte, la presente ricerca non aveva alcuno scopo valutativo di tali processi. La nostra intenzione era solo quella di ottenere nuovi dati di ricerca, confrontarli con quelli ottenuti negli anni '90 e analizzarli con nuovi strumenti di ricerca per comprendere più a fondo sia l'effetto di parole sconosciute (non matematicamente rilevanti) nel processo di risoluzione di un problema di matematica, sia il ruolo di diverse teorie in didattica della matematica nel processo di analisi e interpretazione dei dati raccolti. Uno stimolo forte per future ricerche.

Ringraziamenti

Hanno partecipato a questa ricerca come insegnanti sperimentatori i seguenti docenti di scuola primaria di Italia e Ticino, che ringraziamo di cuore; senza il loro gentile contributo, ovviamente la ricerca sarebbe stata impossibile:

Anna Angeli, Michela Bettoni, Ivan Bonfanti, Lorella Campolucci, Mariamonica Cappelli, Maria Elena Cazzetta, Luca Crivelli, Erminia Dal Corso, Simona Gaccione, Claudia Gualandi, Antonella Martelli, Alice Messineo, Stefania Micalizzi, Carlo Mina, Malvina Nurrito, Claudio Poretti, Rosalia Tusa e Anna Zaninelli.

Riferimenti bibliografici

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020a). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 28(1), 7–61.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020b). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa: Dossier Temático Teoría de la Objetivación*, 5(2), 33–50.

Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.

Bateson, G. (1976). *Verso un'ecologia della mente*. Milano: Adelphi.

Berger, P. L., & Luckmann, T. (1997). *La realtà come costruzione sociale*. Bologna: Il Mulino.

- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, 101(3–4), 107–131.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- D'Amore, B. (1997). Matite - orettole - przxetqzyw: Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20A(3), 241–256. [Versione in lingua spagnola: (1997). *Suma*, 10(26), 111–116. Versione in lingua francese in: A. Gagatsis (Ed.) (1999). *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Nicosia (Cipro): Intercollege. 25–36].
- D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: Difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: Cognitive difficulties and obstacles. [Bilingue]. *L'educazione matematica*, 13(1), 7–28. [In lingua spagnola: (1998). *Objetos relacionales y diversos registros representativos: Dificultades cognitivas y obstáculos*. *Uno*, 15, 63–76].
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física].
- D'Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: Raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, 12(1), 39–50.
- D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México DF: Reverté-Relime]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matemática*. São Paulo: Escrituras].
- D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 557–583.
- D'Amore, B. (2006b). *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido*. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 177–195.
- D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino (Italia): Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Versione in lingua tedesca:

- (2010). Wörterbucheinträge: W. Wiater, N. Belardi, F. Frabboni, G. Wallnöfer (Eds.) (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich*. Baltmannsweiler (Germania): Schneider Verlag Hohengehren. Wörterbucheinträge: Fachdidaktik (pp. 98–101), Mathematische Bildung (pp. 227–228), Naturwissenschaftliche (pp. 255–258), Wissenschaft (pp. 362–364).
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica>
- D'Amore, B. (2017a). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretado en clave sociológica. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 29–41). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B. (2017b). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1(1), 4–20. www.rivistaddm.ch
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97–127.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87–92. [Proceedings of: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006].
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018). Rileggere un articolo pubblicato nel 2000 con occhi del 2018: Che cosa resta, che prospettive sono state raggiunte, che traguardi sono ancora lontani? *La matematica e la sua didattica*, 26(1), 29–55.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contratto"*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punto di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:*

- problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and “mathematics languages”: Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica*, 26(1), 57–82.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2011). *The SAGE handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: Introduction aux problèmes de congruence [Semantic disparities and mathematical coherence: An introduction to the problems of congruence]. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7–25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence [A cognitive approach to the geometrical problems in term of congruence]. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 57–74.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382. [Versione in lingua italiana: Quale cognitivo per la didattica della matematica? *La Matematica e la sua didattica*, 10(3), 1996, 250–269].
- Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 585–619.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Prefazione di Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 67–101.
- Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Neue Folge*, 100(1), 25–50.
- Frege, G. (1948). Sense and reference. *The philosophical review*, 57(3), 209–230.
- Gehlen, A. (1956). *Urmensch und Spätkultur: Philosophische Ergebnisse und Aussagen*. Bonn: Athenäum.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275–291.
- Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 95–113.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press. [Trad. it. 1988: Bologna: Il Mulino, Bologna].
- Johnson, R. B., & Christensen, L. B. (2014). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research

- paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26.
- Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Lotman, Y. M. (1990). *The universe of the mind: A semiotic theory of culture*. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
- Maarouf, H. (2019). Pragmatism as a supportive paradigm for the mixed research approach: Conceptualizing the ontological, epistemological, and axiological stances of pragmatism. *International Business Research*, 12(9), 1–12.
- Ministero della Pubblica Istruzione. (1985). *Programmi didattici per la scuola primaria*. Decreto del Presidente della Repubblica, 12 febbraio 1985, n. 104.
- Ormerod, R. (2006). The history and ideas of pragmatism. *Journal of the Operational Research Society*, 57(8), 892–909.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford: Clarendon Press.
- Peirce, C. S. (1878). How to make our ideas clear. *Popular Science Monthly*, 12, 286–302.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbabs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237–268.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 39–65.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5)*. Larnaca, Cyprus, February 22–26, 2007. CD-ROM.
- Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–

44.

- Radford, L. (2014a). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, 46, 349–361.
- Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.
- Radford, L. (2017). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 217–228.
- Radford, L. (2018). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In F.-J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–147). Taipei, Taiwan: EARCOME.
- Radford, L. (2019). On the epistemology of the theory of objectification. In U. T. Jankvist, M. V. D. Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6–10, 2019) (pp. 3062–3069). Utrecht, the Netherlands: ERME.
- Radford, L. (in press). Play and the production of subjectivities in preschool. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM4 conference 2018*. Cham: Springer.
- Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Prólogo de Bruno D'Amore. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Sandelowski, M., Voils, C. I., & Knafl, G. (2009). On quantitizing. *Journal of mixed methods research*, 3(3), 208–222.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesi di dottorato). Università di Palermo. Disponibile da <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-publications/2010-santi-1/>
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2–3), 285–311.
- Santi, G. (2012). Oggetti matematici, rappresentazioni semiotiche e significato: Il problema dei cambi di senso. *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35A-B(3), 328–348.
- Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding: An inquiry into human knowledge structures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.
- Stolz, M. (2002). The history of applied mathematics and the history of society. *Synthese*, 133(1–2), 43–57.
- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Vecchio, L. (1992). Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale. In L. Vecchio (Ed.), *Le immagini mentali: Atti del convegno di Pavia, 5–6 ottobre 1990* (pp. 15–48). Firenze: La Nuova Italia.
- Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.),

- Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 20–45). Bologna: Zanichelli-UMI.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2–3), 133–170.
- Vergnaud, G. (2017). Due riflessioni sull'attività in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 7–12
- Weaver, K. (2018). Pragmatic paradigm. In B. Frey (Ed.), *The SAGE encyclopedia of educational research, measurement, and evaluation* (Vol. 1, pp. 1287–1288). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc. doi: 10.4135/9781506326139.n534
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Basil Blackwell.
- [Wittgenstein, L. (1967). *Ricerche filosofiche*. Torino: Einaudi].